Erros na aprendizagem de matemática:

relatos de pesquisas e reflexões

ORGANIZADORA
Helena Noronha Cury

Erros na aprendizagem de matemática:
relatos de pesquisas e reflexões

ORGANIZADORA
Helena Noronha Cury

Centro Universitário Franciscano
Santa Maria | 2016

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Salette Mafalda Marchi

CAPA
Fagner Millani

PROJETO GRÁFICO E DIAGRAMAÇÃO
João Paulo Stefanello Vestena

REVISÃO
Cristine Costa Rodrigues

SECRETARIA
Cinara de Cássia Paze Valente

E72 Erros na aprendizagem de matemática: relatos de pesquisas e reflexões / organizadora Helena Noronha Cury - Santa Maria : Centro Universitário Franciscano, 2016
192 p. : il. ; 16 X 23 cm

ISBN: 978-85-7909-061-5

1. Matemática – análise de erros I. Cury, Helena Noronha

CDU 51

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária Eunice de Olivera – CRB 10/1491

APRESENTAÇÃO

Este livro é resultado de cerca de trinta anos dedicados a pesquisas sobre análise de erros em Matemática. Inicialmente, foi pensado como conclusão do projeto de pesquisa "Análise de erros: um aprofundamento de pesquisas" por mim desenvolvido de 2013 a 2015, com bolsa de produtividade em pesquisa do CNPq. Efetivamente, um dos objetivos específicos do projeto envolvia a elaboração de um livro, a fim de sintetizar os resultados obtidos na investigação. No entanto, dei-me conta de que nada do que eu tinha pesquisado nesse último projeto tinha sido fruto, apenas, da investigação em questão: todas as outras produções, minhas, de colegas que comigo colaboraram em diversos projetos e dos alunos que orientei nesses anos todos, formaram um pano de fundo para tecer a urdidura deste relato final. Desta forma, tomei a decisão de encerrar esses anos em que fui bolsista de produtividade em pesquisa com uma produção em que fossem citados todos esses trabalhos desenvolvidos, mas que também fossem relatados os resultados desse último projeto. Assim, na **Introdução**, faço este resgate.

Ao ter detectado, em mapeamentos realizados durante essas últimas investigações, que a análise de erros está apresentando novas facetas, com pressupostos teóricos variados e com diferentes metodologias de pesquisa, considerei que seria interessante também apresentar, neste livro, alguns trabalhos que envolvem, de alguma forma, avaliação da produção de alunos ou professores, de forma a destacar erros, dificuldades ou obstáculos à aprendizagem de Matemática. Convidei, então, alguns colegas para escreverem capítulos neste livro e mostrarem, a todos os que se interessam pelo ensino e a aprendizagem de Matemática, uma parte do que tem sido pensado e realizado sobre esse tema. Com isso, ao elaborar o livro em versão eletrônica, disponibilizada livremente, acredito que possa servir de subsídio para novas pesquisas e debates. Apresento, a seguir, os capítulos desta obra e os autores que gentilmente aceitaram o convite para dela participar, a quem desde já agradeço.

No **Capítulo 1**, apresento uma análise quanti-qualitativa de pesquisas sobre erros, dificuldades ou obstáculos, mapeadas nas dissertações e teses defendidas nos Programas de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, a fim de identificar as teorizações que têm sido usadas nessas produções. Sou Licenciada e Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do

Rio Grande do Sul, Mestre e Doutora em Educação pela mesma instituição e docente/pesquisadora do Centro Universitário Franciscano.

No Capítulo 2, Rosana Nogueira de Lima tece considerações sobre *mal-rules* em Álgebra, enfocando os dados à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática. Rosana é Licenciada e Bacharel em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Mestre e Doutora em Educação Matemática pela mesma Universidade, tendo desenvolvido doutorado sanduíche na Universidade de Warwick, Inglaterra, sob a orientação de David Tall. Atualmente é docente/pesquisadora da Universidade Anhanguera de São Paulo.

No Capítulo 3, Regina Luzia Corio de Buriasco e Andréia Büttner Ciani apresentam reflexões sobre avaliação, especialmente da avaliação como prática de investigação, à luz da Educação Matemática Realística. Regina é Licenciada em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santo André (SP), Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho e Doutora em Educação pela mesma Universidade. Atualmente é docente/pesquisadora da Universidade Estadual de Londrina e pesquisadora do CNPq. Andréia é Bacharel em Matemática e Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho e Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Atualmente é docente/pesquisadora da Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

No Capítulo 4, Josiele Maria Fusiger relata uma pesquisa sobre erros cometidos por estudantes de Ensino Médio, na resolução de questões sobre perímetro e área de figuras planas, e traz o produto resultante dessa investigação. Josiele é Licenciada em Matemática pelo Centro Universitário Franciscano e Mestre em Ensino de Matemática pela mesma instituição.

No Capítulo 5, Thaísa Jacintho Müller discute erros cometidos por calouros de Cálculo Diferencial e Integral ao resolverem exercícios de Álgebra elementar e aponta sugestões para a superação dessas dificuldades por meio de recursos digitais. Thaísa é Licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul e Doutora em Informática na Educação pela mesma universidade. Atualmente é docente da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

No Capítulo 6, José Carlos Pinto Leivas discute o processo de visualização e sua importância no ensino e na aprendizagem de Geometria. José Carlos é Licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas, Mestre em

Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina e Doutor em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Atualmente é docente/pesquisador do Centro Universitário Franciscano e editor da revista *Vidya*.

No Capítulo 7, Eleni e Vanilde Bisognin, com base em pressupostos sobre o conhecimento do professor de Matemática, relatam os resultados da aplicação de testes sobre os conceitos de perímetro e área a professores em formação continuada. As autoras são Licenciadas em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria, Mestres e Doutoras em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Atualmente são docentes/pesquisadoras do Centro Universitário Franciscano, do qual a Dra. Vanilde é Pró-reitora de Graduação.

No Capítulo 8, discuto o conhecimento matemático para o ensino e suas implicações para a formação do professor de Matemática, especialmente focando o conhecimento sobre os erros.

Helena Noronha Cury

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Helena Noronha Cury

Meu interesse por erros cometidos por alunos ou professores, nos mais diferentes conteúdos matemáticos, originou-se do trabalho desenvolvido no curso de Mestrado em Educação, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), com a dissertação intitulada “Análise de erros em demonstrações de geometria plana: um estudo com alunos de 3º grau”[1], defendida em janeiro de 1989. Essa foi a primeira experiência com pesquisa na área de Educação Matemática, após a Licenciatura e Bacharelado em Matemática, na UFRGS.

Na investigação, busquei analisar e classificar erros cometidos por alunos universitários ao realizar demonstrações em Geometria. Os participantes, alunos de um curso de Licenciatura Plena em Matemática, realizaram demonstrações de proposições de Geometria Plana e suas soluções, tanto orais como escritas, que foram analisadas com o objetivo de classificar os erros detectados e tentar descobrir as causas subjacentes.

As conclusões sobre as causas dos erros detectados envolveram aspectos do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, conceituações sobre demonstrações de teoremas e, também, considerações sobre a influência da filosofia da Matemática que norteia a prática docente e a elaboração dos currículos de cursos de Licenciatura.

Ao retomar as aulas nos cursos de Matemática e Engenharia, nos quais atuava na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), elaborei um projeto de pesquisa para detectar, analisar e classificar erros cometidos por calouros da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, desenvolvido em 1989 e 1990. A experiência produziu as primeiras tentativas de sistematizar os procedimentos metodológicos e de apresentar os resultados. Os dois relatórios da investigação foram apresentados, parcialmente, em Cury (1990) e Cury (1992).

Retomando os estudos pós-graduados, cursei Doutorado em Educação e na tese (CURY, 1994) novamente enfoquei os erros dos alunos, dessa vez pela visão dos professores: “As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos”[2].

[1] Disponível em: <https://sites.google.com/site/helenanoronhacury/dissertacao-e-tese>.
[2] Disponível em: <https://sites.google.com/site/helenanoronhacury/tese>.

No final do trabalho, foram feitas algumas sugestões de mudança para os cursos de Licenciatura em Matemática, de modo que seus professores, formando grupos de discussão, se voltassem para uma concepção menos absolutista dessa ciência e elaborassem um novo currículo, no qual fossem adotados e assumidos pressupostos básicos de novas teorias sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Supunha-se que, se os alunos fossem acompanhados em suas interações com os professores e os colegas em torno do saber, detectando-se erros cometidos e explorando o potencial desses erros, poder-se-ia realizar uma avaliação dinâmica, que explorasse o potencial de cada indivíduo na sua interação com os outros.

A conclusão do doutorado e, posteriormente, o ingresso na equipe de docentes do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, PUCRS, proporcionaram oportunidades de realização de outras investigações sobre erros e dificuldades de alunos ou de professores de Matemática.

No projeto "Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores", desenvolvido de 2005 a 2007 e apoiado pelo CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), foi constituída uma equipe de professores de nove Instituições de Ensino Superior (IES) do Rio Grande do Sul, que aplicaram um teste e analisaram erros cometidos por 368 alunos calouros de cursos de Ciências Exatas. Os resultados, apresentados em artigos e comunicações[3], mostraram problemas com conteúdos matemáticos da educação básica.

Quando já trabalhava no Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, em novo projeto apoiado pelo CNPq, "Análise de erros em problemas resolvidos por professores de Matemática em cursos de formação continuada", desenvolvido de 2009 a 2011 por dez docentes de cinco IES gaúchas, foi aplicado um teste a 50 professores de cursos de formação continuada dessas IES. Os resultados evidenciaram dificuldades em conteúdos que fazem parte de disciplinas básicas dos cursos de graduação em Matemática. Dessa forma, foram criadas atividades sobre os temas propostos nas questões do teste, para auxiliar os professores na revisão desses conteúdos, bem como no trabalho com seus alunos da educação básica. A produção resultante desse projeto encontra-se distribuída em seis comunicações, três artigos e um livro digital[4].

[3] Cury et al., 2005; Cury; Konzen, 2006; Cury, 2006a, 2006b; Cury; Motta, 2006; Cury; Moraes, 2006; Cury; Bisognin, 2006; Bisognin, Fioreze, Cury, 2007.

[4] Cury; Bisognin; Bisognin, 2009a, 2009b, 2011; Bisognin; Bisognin; Cury, 2010a, 2010b; Cury, 2010; Viali; Cury, 2009; 2011; Leivas, Cury; 2010; Cury; Trevisan, 2010.

Além dessas produções, nos dois Programas de Mestrado em que orientei dissertações, oito delas abordaram erros ou dificuldades de estudantes na aprendizagem de Matemática[5]. A experiência acumulada sobre o tema levou-me a solicitar bolsa de produtividade em pesquisa, concedida pelo CNPq durante os anos de 2010 a 2012 e 2013 a 2015[6], durante os quais desenvolvi dois projetos de pesquisa.

No primeiro projeto, "Análise de erros: uma possibilidade de trabalho em cursos de formação inicial e continuada de professores", entre outros objetivos, propunha-me a fazer um levantamento sistemático de trabalhos sobre erros ou dificuldades de aprendizagem em Matemática, realizados no Brasil. Esse mapeamento focou dissertações e teses defendidas em Programas de Pós-graduação da área de Ensino de Ciências e Matemática[7] da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e os resultados foram apresentados em Cury (2013a).

O segundo projeto apoiado por bolsa de produtividade em pesquisa, intitulado "Análise de erros: um aprofundamento de pesquisas", teve, entre seus objetivos, os seguintes: a) atualizar a listagem sobre dissertações e teses relacionadas a erros, dificuldades ou obstáculos encontrados por alunos ou professores de Matemática, defendidas nos Programas de Pós-graduação da área de Ensino de Ciências e Matemática; b) analisar a fundamentação teórica encontrada nessas dissertações e teses. Uma parte dos resultados foi publicada em Cury (2013b).

Em todas essas produções, desde a dissertação de mestrado de 1989, houve a preocupação de interpretar os dados à luz de algum estudo já realizado sobre os temas abordados ou de alguma teorização sobre ensino ou aprendizagem de Matemática. No entanto, nem sempre esse cuidado ficou explicitado nos textos e, no desenvolvimento do último projeto citado acima, essa busca por modelos teóricos trouxe como resultados os elementos que são apresentados a seguir, no Capítulo 1.

---

[5] Model, 2005; Feltes, 2007; Bortoli, 2011; Borges Fortes, 2012; Brum, 2013; Rossato, 2014; Fusiger (2015); Monteiro (2015).

[6] Processos CNPq 310947/2009-0 e 303220/2012-0.

[7] Essa área, atualmente, é denominada simplesmente de "Ensino", incluindo os Programas de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, junto de Programas de Ensino de outras áreas específicas.

REFERÊNCIAS

BISOGNIN, E.; FIOREZE, L. A.; CURY, H. N. Análise de erros e proporcionalidade: uma experiência com alunos de graduação e pós-graduação. **Vidya**, v. 25, p. 33-44, 2007.

BISOGNIN, V.; BISOGNIN, E.; CURY, H. N. Conhecimentos de professores da educação básica sobre o conceito de função. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010a.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V.; CURY, H. N. Análise de erros na resolução de uma questão sobre convergência de sequências. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 5., 2010, Canoas. **Anais...** Canoas: ULBRA, 2010b.

BORGES FORTES, A. W. **Razões trigonométricas no triângulo retângulo: uma análise de erros no ensino médio**. 2012. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2012.

BORTOLI, M. de F. **Análise de erros em matemática: um estudo com alunos de ensino superior**. 2011. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2011.

BRUM, L. D. **Análise de erros cometidos por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental em conteúdos de álgebra**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2013.

CURY, H. N. **Análise de erros em demonstrações de geometria plana**: um estudo com alunos de 3º grau. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1988.

_______. Análise e classificação de erros cometidos por alunos de Cálculo Diferencial e Integral. In: REUNIÃO ANUAL DA SBPC, 42., 1990, Porto Alegre. **Anais**... São Paulo: SBPC, 1990, v. 2, p. 124-125.

_______. Analisis y clasificación de errores en calculo diferencial e integral. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 8., 1991, Miami. **Actas**. Paris: UNESCO, 1992. p.134.

_______. **As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. 1994. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

_______. A análise de erros na construção do saber matemático. In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1. e JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2006, Passo Fundo. **Anais...** Passo Fundo: UPF, 2006a.

_______. Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Curitiba: UFPR, 2006b.

_______. Análise de erros. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010.

_______. Erros, dificuldades e obstáculos em produções escritas de alunos e professores. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. F. T. de (Org.). **Marcas da educação matemática no ensino superior**. Campinas: Papirus, 2013a. p. 15-41.

_______. Uma proposta para inserir a análise de erros em cursos de formação de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 15, n. 3, p. 547-562, 2013b.

CURY, H. N. et al. Análise de erros em disciplinas matemáticas: um estudo com alunos de engenharia e ciência da computação. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 11., 2005, Penedo, RJ. **Anais...** Rio de Janeiro: UERJ, 2005.

CURY, H. N.; KONZEN, B. Análise de resoluções de questões em matemática: as etapas do processo. **Educação Matemática em Revista**-RS, v. 7, p. 33-41, 2006.

CURY, H. N.; MOTTA, C. E. M. Análise de erros e raiz da soma de reais: como superar a sobregeneralização? In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 3., 2006, São Paulo. **Anais...** São Paulo: PUCSP, 2006.

CURY, H. N.; MORAES, J. F. D. de. Erros em questões de matemática; uma análise quantitativa. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 29., 2006, Campinas. **Anais...** Campinas: UNICAMP, 2006.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E. Calculando o volume de um sólido: como a análise de erros pode auxiliar professores a elaborar atividades de ensino para calouros de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 34., 2006, Passo Fundo. **Anais...** Passo Fundo: UPF, 2006.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Um exemplo de utilização da análise de erros como metodologia de pesquisa. In: REUNIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DEL CONO SUR, 8., 2009, Asunción, Paraguay. **Actas...** Asunción: CEMPA, 2009a.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. A análise de erros como metodologia de investigação. In: PROFMAT2009, 2009, Viana do Castelo, Portugal. **Actas...** Viana do Castelo: APM, 2009b.

CURY, H. N.; TREVISAN, M. do C. B. (Org.). **Análise de erros e uso de jogos**. Santa Maria: UNIFRA, 2010.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Uma discussão a respeito de soluções de professores em formação continuada a uma questão sobre equação polinomial de 2º grau In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais**... Recife: CIAEM, 2011. p. 1-13.

FELTES, R. Z. **Análise de erros em potenciação e radiciação:** um estudo com alunos de Ensino Fundamental e Médio. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

FUSIGER, J. M. **Análise de erros no cálculo de perímetro e área de figuras planas no ensino médio**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2015.

LEIVAS, J. C. P.; CURY, H. N. Análise de erros em soluções de um problema de geometria: uma investigação com professores em formação continuada. **REVEMAT**, v. 5, n. 1, p. 71-83, 2010.

MODEL, S. **Dificuldades de alunos com a simbologia matemática.** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

MONTEIRO, T. Q. **Análise de erros como metodologia de ensino**: novas abordagens. 2015. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2015.

ROSSATO, S. L. da S. **Análise de erros na divisão de números decimais por alunos do 6º ano do ensino fundamental**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2014.

VIALI, L.; CURY, H. N. Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 11, n. 2, p. 373-391, 2009.

VIALI, L.; CURY, H. N. Professores de Matemática em formação continuada: uma análise de erros em conteúdos de probabilidade. **Em Teia**, v. 1, n. 1, p. 1-24, 2011.

CAPÍTULO 1

PERSPECTIVAS TEÓRICAS NAS DISSERTAÇÕES E TESES SOBRE ERROS, DIFICULDADES OU OBSTÁCULOS NA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Helena Noronha Cury

1. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE TEORIZAÇÕES

Desde os primeiros levantamentos da produção de mestrandos e doutorandos sobre erros, dificuldades ou obstáculos, foi possível notar que os autores nem sempre distinguem revisão de literatura de fundamentação teórica. Muitas vezes uma lista de dissertações ou teses consta da chamada "fundamentação teórica", quando esses trabalhos, efetivamente, deveriam formar a revisão da literatura existente sobre o tema (erros, dificuldades ou obstáculos).

Flick (2009) comenta que a revisão de literatura pode ajudar o investigador a encontrar respostas para perguntas como: o que já foi pesquisado sobre o tema escolhido para a dissertação ou tese? Quais teorias são usadas nessa área? Que questões ainda estão em aberto? O que ainda não foi pesquisado? As respostas a essas questões permitem que o pesquisador não esteja a "reinventar a roda" e mostram, também, o cuidado em localizar seu estudo dentre outros que já foram feitos na área.

Creswell (2010) indica os passos que devem ser seguidos por um pesquisador para fazer uma revisão de literatura (identificação de palavras-chave, localização de materiais a partir delas, leitura inicial do material, organização de um mapa da literatura, resumo dos principais temas encontrados). Mas essa revisão não basta, porque é necessário enfocar os resultados da pesquisa através de uma lente que permita ao investigador elaborar suas hipóteses, estabelecer uma metodologia de pesquisa, criar os instrumentos de coleta de dados, interpretar os resultados e concluir o trabalho com respostas às questões de pesquisa. E essa lente são os pressupostos teóricos, são as ideias-chave já enunciadas por algum teórico e assumidas pelo investigador como embasamento para seu trabalho.

No caso da Educação Matemática, quais pressupostos teóricos são assumidos? Essa é uma pergunta difícil, porque primeiro temos de conceituar "teoria". Segundo o Dicionário Aurélio (FERREIRA, 1999), a palavra "teoria" vem do grego "theoria", "ação de contemplar, examinar". Entre as várias acepções dessa palavra apresentadas nesse Dicionário, temos: "Conjunto de princípios fundamentais de uma arte ou de uma ciência" (p. 1.944).

No Dicionário Houaiss (HOUAISS; VILLAR, 2001, p. 2.697), lê-se que "teoria" é "conjunto de regras ou leis, mais ou menos sistematizadas, aplicadas a uma área específica". No Grand Dictionaire Encyclopédique Larousse (1985, p. 10.193), "teoria" é um "conjunto organizado de princípios, de regras, de leis científicas, visando descrever e explicar um conjunto de fatos"[8].

Finalmente, em Dicionário de Filosofia (ABBAGNANO, 2007, p. 952-953), lê-se, entre várias acepções da palavra, que: "uma T. [teoria] científica não é um acréscimo interpretativo ao corpo da ciência, mas é o esqueleto desse corpo. Em outros termos, a T. condiciona tanto a observação dos fenômenos quanto o uso mesmo dos instrumentos de observação".

Na Educação Matemática não há <u>um</u> conjunto de princípios, visto que essa área está situada no cruzamento de diversos campos e "a problemática didática leva a remanejar mais ou menos profundamente as ferramentas, conceituais ou metodológicas, que a pesquisa delas toma emprestadas". (ARTIGUE, 1996, p. 1).

No livro organizado por Sriraman e English, cujo título é "Teorias da Educação Matemática"[9], não se encontra uma lista de teorias, mas comentários e reflexões sobre um conjunto de ideias propostas por vários filósofos, pesquisadores ou educadores dessa área. Mas é exatamente essa pluralidade que proporciona ao investigador as lentes através das quais vai enfocar algum fenômeno na área da Educação Matemática.

2. AS TEORIZAÇÕES EVIDENCIADAS

Uma característica interessante em todas as teorizações citadas nas pesquisas mapeadas é sua origem: quase todas citam ideias de algum

[8] *Théorie: Ensemble organisé de príncipes, de règles, de lois scientifiques, visant à décrire et à expliquer un ensemble de faits.*

[9] Citado no próximo item.

teórico da Psicologia, da Filosofia ou da Sociologia. Detecta-se a influência de Piaget, de Vygotski, de Ausubel, de Paulo Freire, de pensadores da escola de Frankfurt, entre outros, sendo que as ideias de alguns desses pesquisadores são citadas, especificamente, como fundamentos para a análise dos dados de algumas investigações.

Fazer uma apresentação de cada um dos quadros teóricos encontrados é tarefa impraticável em um único livro, haja vista que cada teórico tem vários textos para discutir suas ideias e já há publicações que fazem essas sínteses (MACHADO et al., 1999; MACHADO, 2003; ALMOULOUD, 2007; D´AMORE, 2007), às quais se pode recorrer para aprofundar o tema. Aqui, apenas cito as que tenho encontrado nos mapeamentos feitos.

Primeiramente, destacam-se os teóricos que fazem parte da chamada "escola francesa", a saber: Brousseau (Teoria das Situações Didáticas); Vergnaud (Teoria dos Campos Conceituais); Douady (Dialética Ferramenta-Objeto e Jogo de Quadros); Chevallard (Teoria Antropológica do Didático), Duval (Teoria dos Registros de Representação Semiótica).

Em seguida, surgem outros pesquisadores cujas ideias são referenciais teóricos para muitos trabalhos: Godino, Batanero e Font (Enfoque Ontosemiótico da Cognição e Instrução Matemática – EOS); Skovsmose (Educação Matemática Crítica); Tall (Teoria dos Três Mundos da Matemática); Dubinsky (Teoria Ação, Processo, Objeto, Esquema – APOS); Freudenthal e outros pesquisadores da "escola holandesa" (Educação Matemática Realística – RME).

Kilpatrick (2010), ao prefaciar o livro de Sriraman e English, faz um alerta que deve ser levado em conta em nossas pesquisas:

> Dizer que algo é uma teoria da educação matemática – em vez de, digamos, uma abordagem, fundamentação teórica, perspectiva teórica ou modelo – é fazer uma reivindicação muito forte. Eu não concederia o status de teoria-de-educação-matemática a qualquer um dos potenciais candidatos citados tanto por Silver e Herbst (2007) quanto por Sriraman e English. Estou feliz em falar sobre teorização, adotando uma instância teórica ou empregar um quadro teórico, mas eu não vejo construções teóricas existentes como merecedoras do rótulo de teoria. (p. 4).

Sriraman e English (2010), para encaminhar os diversos capítulos do seu livro, trazem algumas considerações preliminares. Para eles, qualquer teoria de ensino ou aprendizagem repousa sobre uma filosofia do conhecimento e, como a Educação Matemática está situada no cruzamento dos campos da Educação e da Matemática, interagindo ainda com várias outras disciplinas, é necessário esclarecer as seguintes questões: a) o que é a realidade? Ou o que é a natureza do mundo ao redor de nós? (a questão ontológica); b) como conhecemos o mundo ao redor de nós? (a questão metodológica); c) como podemos estar certos da verdade do que conhecemos? (a questão epistemológica).

Na Educação Matemática, como frisam esses autores, "é uma empreitada fútil formular teorias unificadoras" (Ibid., p. 17), porque há contextos matemáticos diferentes e diferentes ambientes sociais e culturais nos quais são estudados os fenômenos do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Os mesmos autores comentam que a presença de teorias na Educação Matemática é mais visível atualmente do que em décadas passadas, mas que, por outro lado, há um ceticismo sobre o papel das pesquisas guiadas por teorias no que se refere a melhorar o trabalho de sala de aula. Face aos problemas que vislumbram nas discussões atuais, Sriraman e English (2010) consideram que é hora de reavaliar o papel das teorias na Educação Matemática e os autores por eles convidados discutem, no livro, alguns pressupostos teóricos evidenciados na área de Educação Matemática.

Lester Jr. (2010) discute a natureza das fundamentações de pesquisas e seus diferentes tipos. Inicialmente, o autor apresenta sua concepção de fundamentação: "[...] um andaime, erguido para tornar possível a realização de reparos em uma construção" (p. 69). E acrescenta algumas vantagens que vê no uso de fundamentação: 1) proporciona uma estrutura para conceituar e planejar uma pesquisa; 2) não há dados sem uma fundamentação para lhes dar sentido; 3) uma boa fundamentação permite transcender o senso comum; 4) necessidade de compreensão profunda, não apenas de compreensão daquele dado em particular.

Ao levar em conta essas observações, consideramos que algumas pesquisas as quais mencionam o uso de determinada teoria, na verdade só apresentam, ao final, um conjunto de frases feitas, de ideias do senso comum, que não foram originadas no paradigma teórico anunciado.

Já quanto aos tipos de fundamentação, Lester Jr. (2010) considera que, nas pesquisas em Educação Matemática, podem ser identificados os quadros teóricos, práticos e conceituais. Em uma pesquisa em que um determinado quadro teórico foi decidido antecipadamente, o investigador precisa seguir as argumentações daquela teoria, mas isso pode levar a alguns problemas: os quadros teóricos forçam o pesquisador a explicar que seus resultados são obtidos "por decreto", ou seja, pelo apelo à autoridade: nada que é obtido como resultado pode ser interpretado se não houver, na teoria escolhida, uma referência ao fato.

Os quadros práticos guiam o pesquisador a usar "o que funciona". Não são investigações apoiadas em teoria, mas na prática acumulada de experiências de outros professores ou gestores. Aqui, pode-se pensar nas revisões de literatura, que buscam o que já foi investigado em outras pesquisas ou nas recomendações das publicações oficiais, para poder comparar com seus próprios dados.

Por último, Lester Jr. (2010) menciona o quadro conceitual. Para o autor, esse quadro consiste em uma argumentação que engloba diferentes pontos de vista e culmina em uma justificativa para usar um determinado enfoque. Pode ser baseado em diferentes teorias e em diversas experiências que apresentam resultados os quais vão ao encontro dos que são desejados pelo pesquisador. Nesse caso, pode-se pensar nas produções que trazem citações de diversos teóricos e uma justificativa para o uso de determinadas ideias que "se encaixam" nos dados analisados.

É interessante ressaltar que Lester Jr. (2010, p. 83), ao finalizar seu texto, sugere que, ao invés de uma perspectiva teórica em particular ser aderida, atue-se "como ´bricoleurs`, adaptando ideias de um conjunto de fontes teóricas para perseguir nossos objetivos", de forma a aprofundar a compreensão sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Essa ideia de Lester Jr. vem ao encontro de considerações feitas por Stephen Lerman, em outro capítulo do mesmo livro de Sriraman e English, já citado. Lerman (2010) comenta resultados de um trabalho realizado por ele e outros colegas, em que uma amostra de publicações de pesquisa em Educação Matemática, entre 1990 e 2001, foi examinada, especificamente quanto ao uso de teorias, tendo sido reunidas conforme as seguintes categorias:

1) psicologia cultural, incluindo Vigotsky, teoria da atividade, cognição situada, comunidades de prática, interações sociais, mediação semiótica;
2) etnomatemática;
3) sociologia, sociologia da educação, pós-estruturalismo, hermenêutica, teoria crítica;
4) discurso, incluindo perspectivas psicanalíticas, linguística social, semiótica.

Após mostrar, em um quadro, as percentagens de trabalhos analisados que usaram algum dos quatro tipos de teorias classificadas acima, o autor questiona o fato de que uma parte dos investigadores que usaram uma dessas teorias, as revisitaram, questionando as ideias e trazendo outras, de suas investigações, para modificar algum pressuposto previamente explicitado. A grande maioria, no entanto, contentou-se em aplicar as ideias em seus estudos, sem qualquer tentativa de "revisitá-las". Lerman (2010) conclui o texto dizendo-se preocupado não pela quantidade de teorias usadas, mas pela forma de uso, sem questionamentos ou problematizações.

Neste texto, apresento uma análise quanti-qualitativa das pesquisas sobre erros, dificuldades ou obstáculos, mapeadas nos dois projetos de bolsa de produtividade em pesquisa que desenvolvi, e procuro localizar as teorizações que têm sido usadas nessas produções.

3. OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS PARA A INVESTIGAÇÃO DAS TEORIZAÇÕES

A busca por dissertações e teses foi realizada em duas etapas, que correspondem aos dois projetos de bolsa de produtividade em pesquisa. Na primeira, essa busca englobou produções encontradas nos *sites* dos programas de Pós-graduação da área de Ensino de Ciências e Matemática, desde a criação dos cursos dessa área até o que estava publicado em março de 2011. A segunda etapa complementou os dados, englobando produções disponibilizadas desde a data anterior até abril de 2013.

Nas duas etapas, foram listadas 2.251 dissertações ou teses. Buscando, nos títulos, resumos ou palavras-chave, as expressões "erros", "dificuldades" ou "obstáculos", na primeira etapa, foram encontradas 57 dissertações e duas teses e, na segunda etapa, 39 dissertações e cinco teses. Ao revisar os textos, para esta análise dos referenciais teóricos, duas dissertações e uma tese foram retiradas do conjunto: uma das dissertações, de 2012, trata de dificuldades de professores ao lidar com os alunos e a outra, de 2013, faz referência ao desempenho de alunos talentosos; já a tese, de 2012, trata de obstáculos para inclusão de disciplinas matemáticas em um currículo. Dessa forma, essas três produções não estão relacionadas a erros ou dificuldades na aprendizagem. Portanto, desenvolvo as análises sobre o conjunto de 100 produções (94 dissertações e seis teses).

Este conjunto de dados foi organizado por ordem alfabética de sobrenomes dos autores. Foi criada, então, uma planilha Excel, com as seguintes colunas: número da produção, autor, título, instituição em que foi defendida, caráter da instituição (se pública ou privada), região do país, ano da defesa e autores que fundamentaram a investigação. No caso desses autores, foi delimitado em cinco o número máximo de nomes citados (ou seja, o número máximo de colunas para esse tipo de registro).

Os dados quantitativos, referentes a quantidades de produções por região do país, número de orientadores, distribuição das produções por ano e número de autores citados, são apresentados em quadros, tabelas ou gráficos.

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Inicialmente, a tabela Excel foi percorrida para fazer as contagens dos elementos indicados nas colunas. Em relação às Instituições, nas quais foram produzidas as 100 dissertações ou teses, a informação é apresentada na figura 1:

Figura 1 – Distribuição das produções por Região e Instituição.

Região	IES	N. de Produções	Porcentagem por Região
N	UFPA	7	
	Subtotal N	**7**	**7%**
NE	UFPE	1	
	UFRN	4	
	Subtotal NE	**5**	**5%**
CO	UFMS	1	
	UFG	1	
	Subtotal CO	**2**	**2%**

SE	UFJF	1	
	UFOP	2	
	PUC-MG	1	
	CEFET-RJ	1	
	UFRJ	2	
	UNIGRANRIO	2	
	UNESP-Bauru	1	
	UNESP-RC	4	
	UNIAN	3	
	UNICSUL	5	
	UNICAMP	1	
	PUCSP	23	
	Subtotal SE	**46**	**46%**
S	UEL	19	
	UEM	3	
	UFSC	1	
	UFRGS	2	
	UNIFRA	3	
	UNIVATES	1	
	PUCRS	11	
	Subtotal S	**40**	**40%**
	TOTAL	**100**	**100%**

Fonte: dados da pesquisa.

Nota-se que as regiões Sudeste e Sul concentram a maior parte das produções que investigam erros, dificuldades ou obstáculos de aprendizagem de alunos e professores. De certa forma, essa distribuição está de acordo com a dos cursos de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, sendo que, para o mapeamento feito, apenas foram analisados os Programas que têm produções na área do ensino de Matemática.

Ao comparar a figura 1 com a figura 2, abaixo, que traz a distribuição de Programas da área de Ensino, por região, conforme a CAPES, nota-se a predominância de produções nas regiões Sudeste e Sul.

Figura 2 – Distribuição de Programas por Região.

Região	N. de Programas	%
N	8	7
NE	18	15
CO	10	9
SE	49	42
S	32	27
Total	**117**	**100**

Fonte: adaptado do site da Capes, relação de Cursos Recomendados e Reconhecidos, na área de Ensino.

Outro dado que pode ser obtido a partir da tabela Excel é o número de IES públicas e privadas nas quais as produções mapeadas tiveram origem. É interessante destacar que nesse quesito os dados se distribuíram quase igualmente, uma vez que 51 trabalhos se originaram em IES públicas e 49, em IES privadas.

A produção de dissertações e teses cresceu no decorrer dos anos, como se pode ver na tabela 1, a seguir:

Tabela 1 – Distribuição das produções por ano.

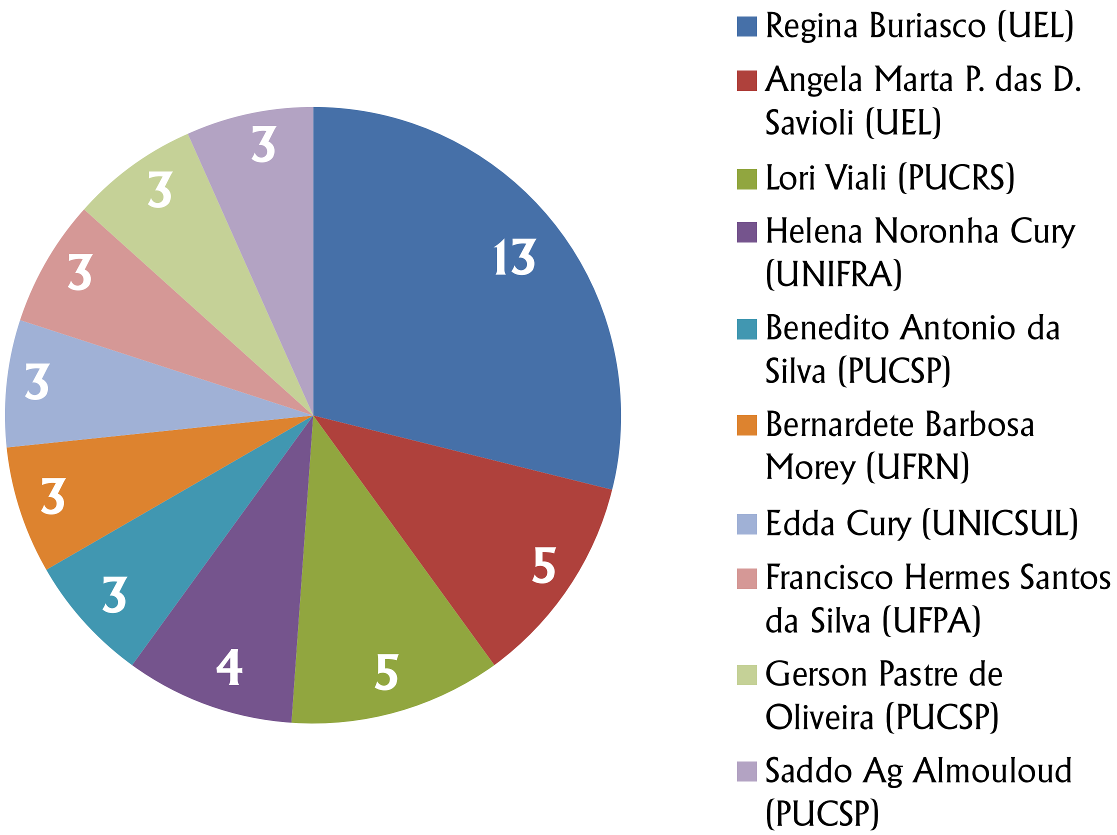
Anos	N. de produções
2001 |--| 2003	4
2004 |--| 2006	13
2007 |--| 2009	37
2010 |--| 2013	46
Total	**100**

Fonte: dados da pesquisa.

Supõe-se que tenha havido um aumento nos últimos anos, haja vista que o mapeamento foi realizado apenas até abril de 2013, mas essa informação ainda depende de novos mapeamentos.

Quanto às orientações, notou-se uma grande dispersão das produções. Foram elencados 57 orientadores, sendo que a maior parte (68%) orientou apenas uma dissertação ou tese. Em seguida, há 14% que orientaram duas produções, 11% que orientaram três, 2% que orientaram quatro, 4% que orientaram cinco e 2% com 13 orientações. Na figura 3, estão indicados os doutores que orientaram três ou mais produções.

Figura 3 – Doutores que orientaram três ou mais produções.



Fonte: dados da pesquisa.

Nos dois projetos, entre as questões propostas para investigação por meio do mapeamento de dissertações e teses, salienta-se que há indagação sobre a fundamentação teórica dos trabalhos, a saber: que teorias estão sendo usadas pelos pesquisadores da área de Educação Matemática, no Brasil, para embasar seus trabalhos sobre erros, dificuldades ou obstáculos na aprendizagem de alunos ou professores, quanto ao conteúdo matemático?

Visto que o foco é essa fundamentação teórica, é mister explicar os procedimentos usados para elencar os autores citados nas produções. Para a delimitação do número de autores em cinco (correspondente a cinco colunas na tabela Excel, para cada produção analisada), algumas decisões foram tomadas: primeiramente, não foi considerada como "fundamentação teórica" a indicação de autores de outras dissertações ou teses, visto que, em princípio, essas fazem parte da revisão de literatura, mesmo que não tenham sido assim denominadas pelos mestrandos ou doutorandos. Considera-se, também, que o capítulo sobre metodologia de pesquisa (ou título equivalente), ainda que seja fundamentado por obras sobre o tema, não configura uma abordagem teórica para análise e interpretação dos dados e os autores citados nesse capítulo não foram, também, incluídos na listagem.

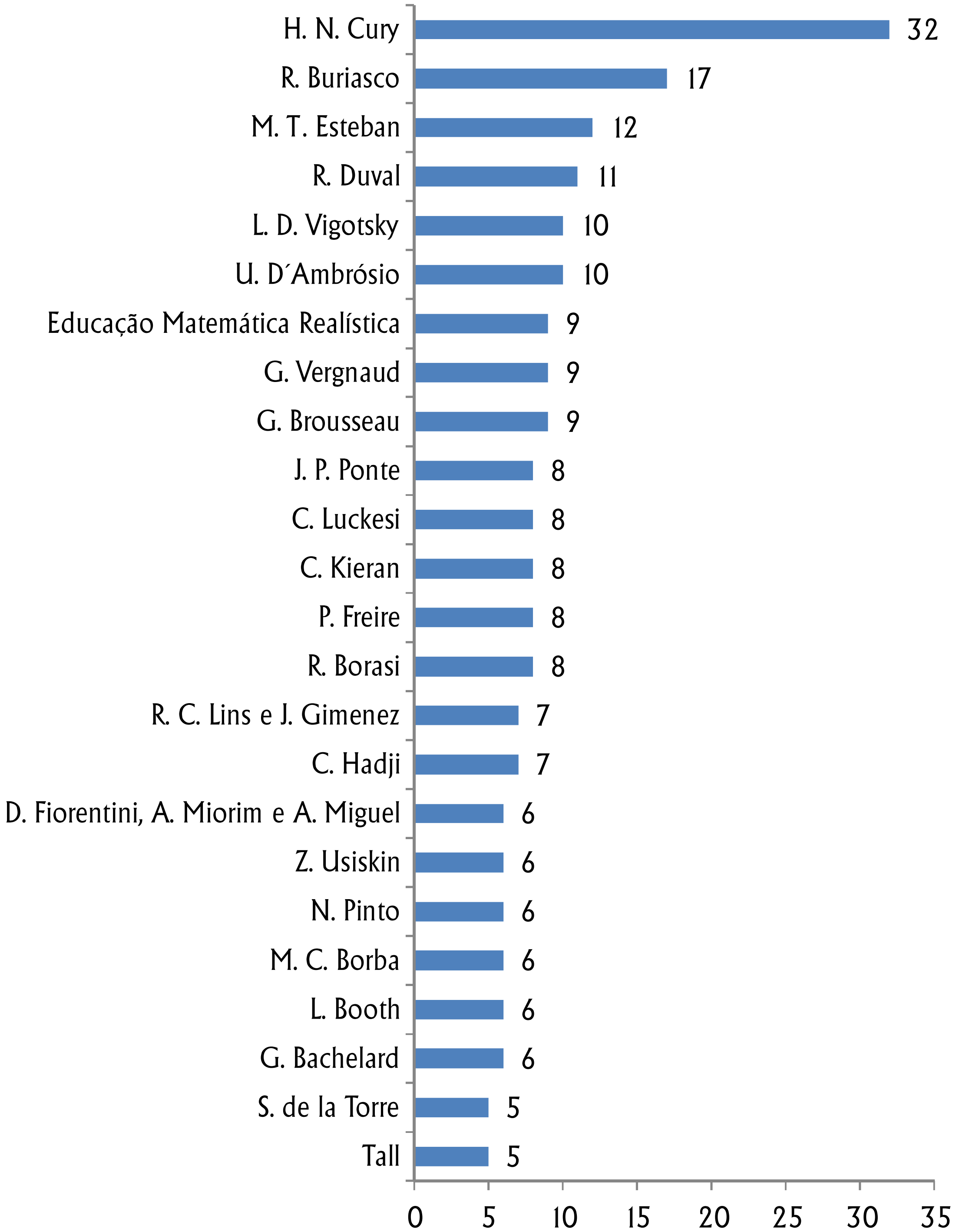
Assim, somente foram levadas em conta aquelas obras que mencionam alguma teoria de ensino ou de aprendizagem (ou mesmo teorias que foram tomadas emprestadas de outros campos da ciência, como Sociologia, Filosofia, História, etc.). Em alguns casos, em que não havia uma teoria específica, foram incluídas algumas obras da revisão de literatura, por considerar que permitem compreender as ideias por trás das análises ou, mesmo, os autores que as fundamentaram.

Em alguns casos, os autores citados na revisão de literatura não são mais utilizados no restante da dissertação ou tese. Em outros casos, são citadas apenas frases de algumas obras, sem encadeamento ou sem comentários. Para delimitar o número de autores, nesses casos, foi necessário examinar o(s) capítulo(s) referente(s) à análise dos dados ou às conclusões, para verificar se alguma obra, dentre as que constituíram revisão de literatura, apoiou a análise ou as conclusões. Assim, quando as obras citadas não se consubstanciam em teorias e não se nota sua presença nas análises ou conclusões, optou-se por indicar autores que têm mais de uma obra citada na listagem das referências.

Conforme as delimitações explicadas e o número de autores indicados nas cinco colunas da planilha, o número de autores citados, em cada produção, variou de um a cinco; se todos os autores fossem diferentes, haveria 500 nomes. Foram usadas as ferramentas do Excel para listar todos os nomes em uma só coluna, em ordem alfabética, e encontrados 170 autores[10]. Desses, são apresentados, na figura 4, os que têm cinco ou mais citações:

[10] No caso de autores da Educação Matemática Realística, apenas essa abordagem foi citada, não sendo discriminados os teóricos.

Figura 4 – Número de citações de autores.



Fonte: dados da pesquisa.

Nesta lista, nota-se que os três primeiros autores mais citados não têm uma teoria de ensino ou aprendizagem em Educação Matemática; são pesquisadores que escrevem sobre análise de erros, sobre análise da produção escrita ou, ainda, sobre erro e fracasso escolar. Se os teóricos que foram indicados no item 2 forem buscados, nota-se que poucos deles são citados mais de cinco vezes. Assim, em um primeiro olhar, quantitativo, sobre as 100 produções, vê-se que elas não se baseiam, fortemente, em abordagens teóricas da área de Educação Matemática.

Cruzando os nomes indicados no item 2 deste capítulo com essa lista de autores na figura 4, têm-se os seguintes teóricos: Brousseau, Vergnaud, Duval, Vigotysky, Freire, Tall e os que embasam a Educação Matemática Realística. Quais outros autores também são citados nas dissertações ou teses que mencionam essas sete orientações teóricas? Para isso, também foi usado o filtro do Excel e obtidas as informações listadas no quadro 1. É importante notar que alguns autores são citados em mais de uma produção, o que é indicado entre parênteses nesse quadro 1. Por exemplo, Bachelard é mencionado em quatro produções que citam Brousseau.

Em certos casos, os nomes de autores relacionados às citações de cada teórico são originários de outras áreas de conhecimento que não a Educação ou a Educação Matemática. Mesmo assim são indicados, pois são referências que, de alguma forma, vêm sendo usadas na área. Para os sete teóricos apontados, optou-se por mencionar somente o sobrenome; para os demais autores, foram indicadas também as iniciais do nome, para facilitar seu reconhecimento pelos leitores. Evidentemente, as citações só são contadas uma única vez: por exemplo, se, ao filtrar o nome "Brousseau" encontrar-se o nome "Vergnaud", essa relação já está explicitada e não será mais contada ao filtrar o nome "Vergnaud".

Os dados desses cruzamentos são apresentados no quadro 1, abaixo:

Quadro 1 – Relações entre citações.

Teórico	Outros autores citados
Brousseau	G. Bachelard (4), Vergnaud (2), P. Perrenoud (2), M. Artigue, D. Ball, R. Borasi, M. Borba e M. Penteado, R. Buriasco, Y. Chevallard, E. Cid, H. Cury, B. D´Amore, Duval, C. Gauthier, G. Glaeser, M. A. Gravina, T. O. Gonçalves, S. Igliori, V. Kenski, S. Lorenzato, A. Nóvoa, T. Nunes, N. B. Pinto, J. Piaget e R. Garcia, J. P. Ponte, A. Sierpinska, M. Tardif.

Vergnaud	G. Bachelard (2), D. Schön (2), M. Artigue, D. Ball e H. Bass, M. Bittar, H. Cury, U. D´Ambrósio, Duval, M. C. Fonseca, G. L. Guimarães, F. Imbernon, C. Kamii, Y. La Taille, D. Lerner e P. Sadovsky, P. Lévy, C. A. Lopes, A. Novoa, T. Nunes e P. Bryant, G. Polya, J. P. Ponte, L. Shulman, M. Tardif e D. Raymond, J. A. Valente, Vygotsky, Z. Usiskin.
Duval	S. A. Almouloud (2), H. Cury (3), C. Boyer, M. A. Catalán, I. Cazorla, F. R. Curcio, R. Damm, C. Flores e M. Moretti, S. Igliori, V. Kenski, T. E. Kieran, P. Lévy, R. Lins e J. Gimenez, C. Luckesi, B. Parsycz, P. Perrenoud, N. B. Pinto, J. P. Ponte, A. Robert, L. Santaella, J. A. Valente, C. M. Vendramini e M. R. Brito, Vygotsky, Z. Usiskin.
Vygotsky	H. Cury (3), R. Borasi (2), U. D´Ambrósio (2), Ausubel, R. Baldino, J. K. Baumgart, L. Booth, M. Borba e M. Penteado, R. Buriasco, T. Cabral, M. A. Catalán, C. Coll, S. de La Torre, D. Fiorentini, A. Miorim e A. Miguel, Freire, P. Lévy, A. N. Leontiev, R. Lins e J. Gimenez, N. J. Machado, J. M. Moran, L. Onuchic e N. Allevato, E. Pichon-Rivière, J. I. Pozo, H. Radatz, L. Santaella, A. Schoenfeld, A. Zabala.
Paulo Freire	H. Cury (2), U. D´Ambrósio (2), Zabala (2), P. Demo (2), M. Artigue, M. H. Favero, D. Fiorentini, A. Miorim e A. Miguel, J. Hoffmann, C. Kamii, P. Lévy, R. Lins e J. Gimenez, C. Luckesi, J. M. Moran, J. P. Ponte, K. Smole.
Tall	T. Dreyfus (2), J. P. Ponte (2), S. Vinner (2), N. Balacheff, R. Baldino, B. Cornu, H. Cury, A. Domingos, E. Dubinsky, P. Ernest, A. V. Garnica, A. Sfard.
Teóricos da Educação Matemática Realística	R. Buriasco (7), M. T. Esteban (5), M. Barlow (3), C. Hadji (3), H. Cury (2), R. Lins (2), R. Borasi, T. Butts, J. Gimenez, C. Kamii, J. Kaput, C. Kieran, J. P. Ponte, L. Rico.

Fonte: dados da pesquisa.

Em um primeiro olhar a cada linha do quadro 1, chama a atenção o fato de que são citados autores que não seguem, de maneira geral, uma mesma corrente na Educação, na Psicologia ou na Educação Matemática. Se as obras dos autores indicados na coluna da direita do quadro forem buscadas, terão eles se baseado nos teóricos nomeados na coluna da esquerda?

Visto que a investigação sobre pressupostos teóricos que estão sendo assumidos pelos pesquisadores da área de Educação Matemática, no Brasil, no embasamento de trabalhos sobre erros, dificuldades ou obstáculos na aprendizagem de alunos ou professores, é apenas um dos objetivos da pesquisa aqui relatada, acredita-se que as aparentes contradições que surgem no quadro 1 exigem uma investigação, mais abrangente e exclusiva. Fica, então, essa sugestão de tema para novas pesquisas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os dados apresentados, relativos especialmente ao segundo projeto de bolsa de produtividade em pesquisa, vêm ao encontro dos objetivos indicados, aqui retomados: a) atualizar a listagem sobre dissertações e teses relacionadas a erros, dificuldades ou obstáculos encontrados por alunos ou professores de Matemática, defendidas nos Programas de Pós-graduação da área de Ensino de Ciências e Matemática; b) analisar a fundamentação teórica encontrada nessas dissertações e teses.

Sobre a análise dos pressupostos teóricos, algumas considerações podem ser feitas, levando em conta o fato de que muitas dessas 100 produções investigadas são elaboradas por professores que exercem sua prática na educação básica e que podem ter trazido de sua formação inicial uma visão um pouco distorcida do que seja a fundamentação teórica para um trabalho acadêmico.

Rapaport e Silva (2006) realizaram uma investigação com professores, para saber qual o referencial teórico que dizem utilizar em sua prática docente. Para a pesquisa, foram entrevistados 34 professores de diversas áreas. Os autores tinham como hipótese que os professores têm práticas distintas das teorias que dizem embasá-las, de modo que, muitas vezes, os referenciais são usados como "jargões" para sustentar essas práticas. Quarenta e três por cento das citações de teóricos, feitas pelos professores participantes dessa pesquisa, remetem a Piaget, 22% a Freire e 13% a Vygotsky. Rapaport e Silva (2006) constataram que existe muito pouca diferença entre as áreas humanas e exatas no tocante à indefinição de um referencial teórico (os pesquisados citaram vários nomes, inclusive os dos autores dos livros didáticos empregados) ou à negação de resposta. Esse resultado surpreendeu os autores, pois acreditavam que os cursos da área de ciências humanas se propusessem a fornecer um embasamento teórico mais aprofundado do que os cursos de ciências exatas, quanto aos referenciais pedagógicos e psicológicos utilizados na prática docente.

Segundo Rapaport e Silva (2006, p. 6),

> [...]o conteúdo das falas dos participantes revela que uma ampla maioria diz usar um referencial sem ter um conhecimento teórico concreto da própria teoria. Um dos entrevistados justifica a escolha por Paulo Freire dizendo 'por considerar todas as faixas etárias', ou ainda, outro disse escolher Piaget 'por que considero o conhecimento através de um amadurecimento do aluno'.

Esses dados, coletados com professores em exercício na educação básica, são preocupantes, por exemplo, em uma seleção a um curso de mestrado, pois o período de dois anos para aprofundar estudos e elaborar uma dissertação nem sempre é suficiente para que os futuros mestres tenham uma visão aprofundada das perspectivas teóricas que embasam suas próprias pesquisas. Assim, não é de estranhar que sejam encontradas, em algumas dissertações, colagens de citações de vários autores cujas ideias são contrastantes.

Os autores dos próximos capítulos apresentam algumas ideias sobre a sistemática de análise de erros, bem como sobre os pressupostos teóricos que as embasam. Ao final, são apresentadas algumas reflexões sobre ideias de pesquisadores que podem ajudar a desenvolver novas pesquisas na área da Educação Matemática, especialmente levando em conta a formação inicial ou continuada de professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. da UFPR, 2007.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. In: BRUN, J. (Org.). **Didactique des mathématiques.** Paris: Delachaux et Niestlé, 1996. p. 243-274.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

D´AMORE, B. **Didática da matemática.** São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2007.

FERREIRA, A. B. de H. **Novo Aurélio século XXI:** o dicionário da língua portuguesa. 3. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

GRAND Dictionaire Encyclopédique Larousse. Paris: Librairie Larousse, 1985. v. 10.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. de S. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

KILPATRICK, J. Preface to part I. In: SRIRAMAN, B; ENGLISH, L. **Theories of mathematics education**. Berlin: Springer, 2010. p. 3-5.

LERMAN, S. Theories of mathematics education: is plurality a problem? In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. **Theories of mathematics education**. Berlin: Springer, 2010. p. 99-109.

LESTER JR., F. K. On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. **Theories of mathematics education**. Berlin: Springer, 2010. p. 67-85.

MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2003.

MACHADO, S. D. A. et al. **Educação matemática**: uma introdução. São Paulo, EDUC, 1999.

RAPAPORT, A.; SILVA, J. A. da. A utilização de referenciais teóricos na prática docente. **Psicología para América Latina**, n. 5, p. 1-10, feb. 2006. Disponível em: <http://psicolatina.org/Cinco/utilizacao.html>. Acesso em: 04 maio 2015.

SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. Surveying theories and philosophies of mathematics education. In: _______. **Theories of mathematics education**. Berlin: Springer, 2010. p. 7-32.

CAPÍTULO 2

MAL-RULES EM ÁLGEBRA: UMA ANÁLISE À LUZ DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

Rosana Nogueira de Lima

1. INTRODUÇÃO

A literatura em Educação Matemática relacionada a equações lineares é extensa. Busca-se diagnosticar erros cometidos por alunos na resolução delas (SLEEMAN, 1984; PAYNE; SQUIBB, 1990, dentre outros), e justificam-se esses erros pela falta de compreensão da estrutura de uma equação (DREYFUS; HOCH, 2004) ou pelo uso de "regras sem razão" (LINCHEVSKI; SFARD, 1991).

O mesmo não acontece com equações quadráticas. Poucas são as pesquisas que relacionam os erros cometidos por alunos em equações desse tipo ou buscam soluções para tais problemas. Ainda assim, seja qual for a equação, continua sendo necessária a pesquisa não somente sobre os erros cometidos ao resolvê-la, mas também sobre maneiras de se superar dificuldades.

Nessa vasta literatura, nos deparamos com uma ideia nascida na década de 1980. Sleeman (1984) defendeu a existência do que chamou de *mal-rules*, ou regras inapropriadas, para a resolução de equações. A partir dessa ideia, ele fez um levantamento de quais são essas *mal-rules* e da necessidade de se criar algum tipo de instrução para que elas não sejam mais utilizadas pelos alunos. Essas *mal-rules* foram amplamente estudadas e evidenciadas e fez com que Payne e Squibb (1990) estendessem e aprofundassem a compreensão sobre elas.

Os resultados dessas pesquisas mostram que, apesar de inconstantes no trabalho dos alunos, as *mal-rules* são constantes na literatura em Educação Matemática, isto é, até mesmo pesquisadores que não mencionam este termo (como FREITAS, 2002; CORTÉS; KAVAFIAN, 1999) também apresentam dificuldades e erros de alunos que são, em sua essência, *mal-rules*.

Neste capítulo, nossa intenção é trazer uma nova discussão para as chamadas *mal-rules* em equações lineares, e também para as dificuldades em relação a quadráticas. Esta discussão está baseada no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, uma teoria que visa explicar o desenvolvimento cognitivo em Matemática desde o recém-nascido até o matemático profissional (TALL, 2013). Com essa teoria, trouxemos nova luz à discussão sobre *mal-rules* e as dificuldades de alunos em resolver equações. A partir dos pressupostos dela, pudemos perceber que os alunos dão significado corporificado às resoluções que apresentam, de forma que as *mal-rules* podem ser interpretadas como *corporificações procedimentais*, que não estão ligadas a princípios algébricos.

A fim de analisar os resultados apresentados sobre *mal-rules* por Sleeman (1984) e Payne e Squibb (1990), inicialmente faremos uma descrição dos Três Mundos da Matemática, bem como de construtos teóricos que desenvolvemos a partir deles para o estudo de equações.

2. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS PARA O TRABALHO COM EQUAÇÕES

Ao tentarmos compreender os motivos pelos quais alunos cometem determinados erros ao resolver equações, trabalhamos com o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, que nos deu subsídios para analisar mais profundamente os significados dados por alunos a equações e aos símbolos que as compõem. Esta escolha se justificou, inicialmente, por ser um quadro teórico diferente daquele trabalhado por outras pesquisas e, por isso mesmo, que pudesse nos remeter a diferentes análises e conclusões. Além disso, à luz desse quadro teórico, pode-se discutir várias características de entes matemáticos que não ficam evidentes como outros, e isso nos permitiu uma visão mais ampla dos processos cognitivos desenvolvidos ao se trabalhar com equações.

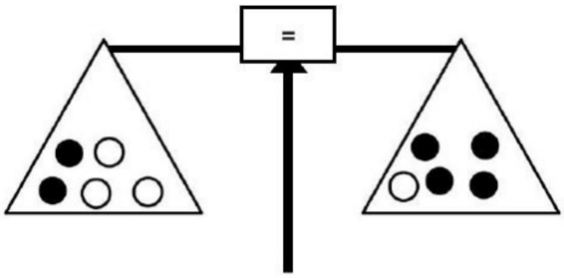
Apresentamos, então, as ideias que permeiam os Três Mundos da Matemática, bem como os construtos teóricos que foram desenvolvidos a partir deles especificamente para o trabalho com equações.

2.1. Os Três Mundos da Matemática

De acordo com Tall (2013), existem três diferentes formas de conhecimento em Matemática. Aquelas que derivam de objetos e suas propriedades, como elementos da geometria; aquelas que são geradas a partir da ação e podem ser representadas por símbolos matemáticos; e as que têm origem em uma abordagem formal, como axiomas, definições e teoremas, que encadeiam o desenvolvimento axiomático da Matemática. A partir delas, Tall (2013) entende a existência de três diferentes maneiras de desenvolvimento do pensamento matemático, a **corporificação conceitual**, o **simbolismo operacional** e o **formalismo axiomático**, que geram, respectivamente, o **Mundo Conceitual Corporificado**, o **Mundo Operacional Simbólico** e o **Mundo Formal Axiomático**.

O Mundo Conceitual Corporificado, que chamamos de mundo corporificado, é o mundo das observações, percepções e reflexões sobre objetos, de forma que se possa perceber as características deles, sejam eles físicos ou mentais. O sujeito pode manipular objetos físicos, de forma a levantar conjecturas sobre suas propriedades e características, mas também pode tratar deles pela percepção mental dessas características. Neste mundo, a visualização tem papel fundamental para que se perceba a Matemática envolta em um determinado objeto. Por exemplo, uma representação para equações a partir de uma balança, buscando o equilíbrio entre os pratos, é uma característica do mundo corporificado (Figura 1) para equações.

Figura 1 – Representação de uma equação por meio de uma balança.



Fonte: Warren e Cooper, 2005, p. 62.

Ao trabalhar com objetos do mundo corporificado, temos necessidade de efetuar ações sobre eles. Tais ações devem ser simbolizadas com elementos do Mundo Operacional Simbólico (anteriormente chamado por TALL (2004) de Mundo **Proceitual** Simbólico), que chamamos de mundo simbólico. Nesse mundo, habitam os símbolos matemáticos que são usados para representar ações efetuadas sobre objetos matemáticos e efetuar cálculos matemáticos. Uma equação como, por exemplo, $2x+3=4x+1$, bem como os passos da sua resolução, são parte do mundo simbólico. Nesse mundo, os símbolos são vistos tanto como o conceito que eles representam quanto como o processo que é realizado com o uso deles, em uma dualidade que foi denominada por Gray e Tall (1994) como "**proceitos**", um amálgama entre as palavras **processo** e **conceito**.

Finalmente, o Mundo Formal Axiomático, o qual chamamos de mundo formal, é o mundo dos axiomas, definições e teoremas, em que esses elementos são usados para deduções e demonstrações, de forma a fazer uma construção axiomática da Matemática. Ao considerarmos as características de demonstrações e formalismo desse mundo, entendemos que ele só é trabalhado em sua totalidade na Educação Superior. Entretanto, a nosso ver, há inúmeras características do mundo formal presentes no desenvolvimento de conceitos matemáticos em todos os outros níveis de escolaridade. No trabalho com equações, por exemplo, o princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os membros é uma característica do mundo formal.

É importante salientar, também, que estes mundos não são vistos de forma estanque, pois eles têm intersecções entre eles. É possível trabalhar simultaneamente com características formais e corporificadas, corporificadas e simbólicas ou simbólicas e formais, e até mesmo com características de todos os três mundos matemáticos. A maneira com que um indivíduo trabalha com ideias de um conceito matemático presentes nesses mundos está relacionada às experiências anteriores de aprendizagem que ele teve.

2.2. A influência de experiências no aprendizado da Matemática

Cada conteúdo matemático possui características de cada um desses mundos matemáticos, e pode-se ou não fazer uso delas quando um indivíduo está em atividade matemática. A jornada de cada indivíduo por esses mundos está relacionada às experiências anteriores com as quais ele se deparou, ou mesmo com experiências que tem no aprendizado atual.

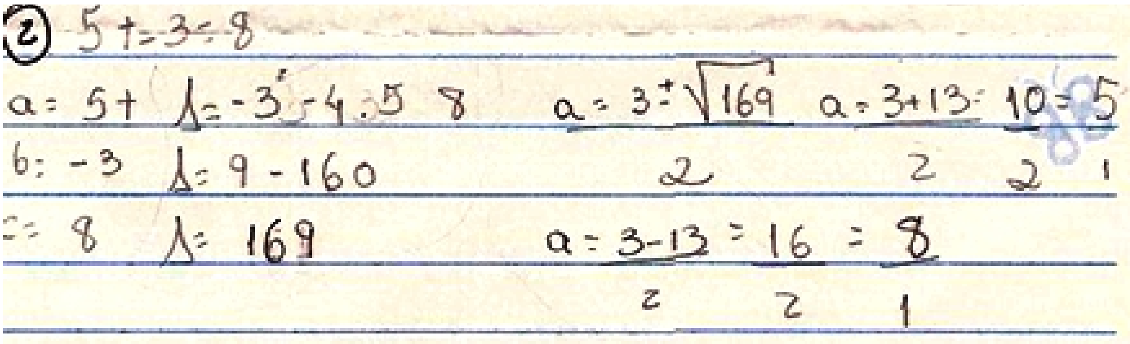
Lima e Tall (2008) referem-se às experiências anteriores de um indivíduo que influenciam um determinado aprendizado como **já-encontrados**[11], isto é, "... um construto mental que um indivíduo usa em um dado momento, baseado em experiências que ele encontrou anteriormente" (2008, p. 6, tradução nossa). Esses **já-encontrados** podem influenciar um aprendizado positiva ou negativamente. Por exemplo, ao lidar com uma expressão algébrica como $3x+4x$, um aluno pode obter $7x$, baseado em suas experiências anteriores em aritmética, sabendo que $3+4=7$. Por outro lado, esta mesma experiência pode influenciar negativamente um aluno que a utiliza para escrever $3+4x$ como

[11] Em inglês: *met-before*.

sendo igual a $7x$. Para Tall (2013), o primeiro caso trata-se de um *já-encontrado* colaborador[12]; enquanto o segundo é um *já-encontrado* dificultador[13].

Durante um aprendizado, um indivíduo também pode desenvolver experiências que colaboram com o aprendizado em curso, ou mesmo modificam aprendizados anteriores. "Usamos o termo '**a-encontrar**'[14] para denotar uma experiência encontrada posteriormente que pode afetar a memória de conhecimentos anteriores." (LIMA; TALL, 2008, p. 6, tradução nossa). Os *a-encontrar* também podem influenciar positiva ou negativamente um aprendizado anterior. Por exemplo, em nossa pesquisa (LIMA, 2007), um aluno, ao iniciar o trabalho com equações quadráticas, aprendeu a fórmula de Bhaskara e resolveu uma equação linear baseando-se nela, como apresentado na figura 2. Esse *a-encontrar* foi utilizado negativamente no trabalho desse aluno.

Figura 2 – Resolução de uma equação linear com o uso da Fórmula de Bhaskara.



Fonte: Lima, 2007, p. 261.

Por outro lado, é possível, também, que um *a-encontrar* seja utilizado de maneira positiva, por exemplo, quando o aprendizado de números complexos permite que um aluno compreenda a impossibilidade de encontrar raízes reais de uma equação quadrática em que o discriminante é menor que zero.

Ao considerarmos estas experiências anteriores, remetemo-nos à ideia de **imagem de conceito** de Tall e Vinner (1981), que a caracterizam como

> [...] a estrutura cognitiva total que é associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos a eles associados. Ela é desenvolvida durante os anos por meio de

[12] Em inglês: *supportive*.
[13] Em inglês: *problematic* – agradecemos a Lulu Healy e Paulo César Freire pela sugestão de tradução para este termo.
[14] Em inglês: *met-after*.

> experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (1981, p. 152, tradução nossa).

Entendemos que os *já-encontrados* são os construtos que formam a imagem de conceito de um indivíduo, pois eles se desenvolvem à medida que ele passa a conhecer outras características e propriedades relacionadas a um conceito, enquanto os *a-encontrar* podem não somente modificar a imagem de conceito de um indivíduo, mas também vir a fazer parte dela, ao se tornarem *já-encontrados*.

2.3. Os Três Mundos da Matemática e as Equações: desenvolvendo aspectos do quadro teórico

Thomas e Tall (2001) buscam discutir o desenvolvimento cognitivo da Álgebra observando o significado dado aos símbolos. Desta forma, distinguiram três níveis de Álgebra: *álgebra de avaliação*; *álgebra de manipulação*; e *álgebra axiomática*. Na álgebra de avaliação, expressões algébricas podem ser avaliadas dando-se valores para a variável, o que permite, por exemplo, que se veja a diferença entre expressões como $3+2 \cdot x$ e $(3+2) \cdot x$ e a equivalência entre $(3+2) \cdot x$ e $5 \cdot x$. Na álgebra de manipulação, expressões algébricas não são avaliadas, e sim manipuladas algebricamente, e a letra assume o papel de incógnita ou de variável em situações como resolução de equações ou trabalho com funções, respectivamente. Nessas situações, não se trabalha somente com números, mas sim com a manipulação de símbolos matemáticos, o que inclui operações com a incógnita. Finalmente, na álgebra axiomática, os sistemas algébricos, tais como espaços vetoriais ou sistemas de equações lineares, são manuseados por meio de definições e de demonstrações. Isso acarreta uma diferenciação entre estruturas técnicas e axiomáticas.

A nosso ver, as álgebras de avaliação e de manipulação fazem parte do mundo simbólico, pela manipulação de símbolos algébricos. Entretanto, quando se trata de números naturais sendo substituídos na incógnita ou na variável, à álgebra de avaliação pode-se atribuir um caráter de pertencente ao mundo corporificado, dada a relação que números naturais têm com esse mundo. Muitas vezes, a ideia relacionada a essa substituição ou ao número natural tem relação com a contagem, característica do mundo corporificado. Já a álgebra axiomática tem características do mundo formal.

Esta análise do desenvolvimento cognitivo específica à Álgebra permitiu que discutíssemos a resolução de equações, tratando-as como equações de avaliação (LIMA; TALL, 2008) e equações de manipulação (LIMA, 2007), e também relacionando esses tipos de equação com características dos Três Mundos da Matemática. Nas equações de avaliação, a incógnita ocorre em um único membro da equação. No caso de equações lineares, elas são do tipo $ax+b=c$, com $a,b,c \in \mathbb{R}$. Para resolvê-las, pode-se desfazer as operações efetuadas sobre a incógnita, isto é, fazer as operações inversas (Figura 3), o que é um tipo de avaliação da expressão em um dos membros para se obter o número presente no outro. Além disso, o sinal de igualdade, nesse tipo de equação, é visto como um **operador** (KIERAN, 1981), isto é, um sinal de "fazer alguma coisa", em que a operação antes dele deve ser realizada, e o resultado da operação deve ser colocado depois dele. Já nas equações de manipulação, a incógnita ocorre em ambos os membros, o que torna impossível desfazer as operações efetuadas sobre ela (LIMA; HEALY, 2010), como na figura 4. Além disso, o sinal de igualdade em equações de manipulação deve ser visto como o que está antes dele é igual ao que está depois dele.

Figura 3 – Desfazendo as operações em uma equação de avaliação.

$$x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{+1} 5$$

$$2 \xleftarrow{\div 2} 4 \xleftarrow{-1} 5$$

Fonte: Lima e Healy, 2010, p. 19.

Figura 4 – Desfazendo as operações em uma equação de manipulação.

$$x \xrightarrow{\times 3} 3x \xrightarrow{-1} 3+x$$

$$\frac{4+x}{3} \xleftarrow{\div 3} 4+x \xleftarrow{+1} 3+x$$

Fonte: Lima e Healy, 2010, p. 19.

Utilizamos esta classificação também para equações quadráticas, considerando que é possível desfazer as operações efetuadas sobre a incógnita em equações na forma $a(x + b)^2+c=d$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, o que as torna equações de avaliação, enquanto equações na forma $ax^2+bx+c=d$ ($a,b,c,d \in \mathbb{R}$) são equações de manipulação. Equações na forma fatorada $(a(x - x_1)\cdot(x - x_2)=0)$ são consideradas equações de avaliação, dado que é possível obter as raízes delas por um tipo de avaliação das raízes.

Tendo sido elaborada a partir de um estudo sobre desenvolvimento cognitivo em Álgebra (THOMAS; TALL, 2001), essa classificação de equações em avaliação e manipulação é útil porque permite que se analisem os elementos e características possíveis de uma equação, além de colaborar para o entendimento de como um aluno percebe ou não tais elementos e lida com eles durante o processo de resolução de equações.

É importante ressaltar, entretanto, que, em nossas análises, apesar de classificarmos as equações lineares e quadráticas em avaliação e manipulação, evidenciamos que é a relação entre o sujeito e a equação, isto é, a maneira com que o sujeito a resolve, que determina essa classificação. Por exemplo, um indivíduo pode resolver uma equação de avaliação, como $5t-3=8$, dizendo que "passou o -3 para o outro lado, trocando o sinal", o que entendemos como manipulação de símbolos, e não avaliação, mesmo que essa manipulação não se origine em princípios algébricos.

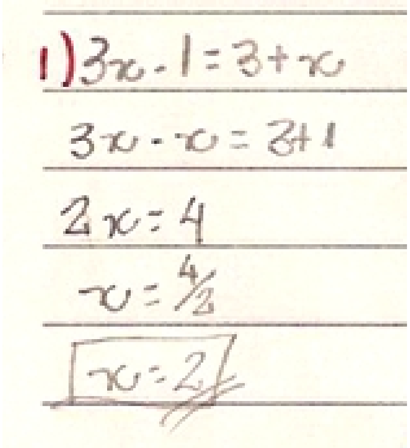
Uma análise do trabalho de alunos ao resolverem equações lineares e quadráticas realizada à luz dos Três Mundos da Matemática nos possibilitou compreender o uso que alunos fazem dessas "regras", usadas para resolver equações, bem como dos significados que dão para equações, para os símbolos utilizados nelas e principalmente para as resoluções que apresentam.

Considerando os Três Mundos da Matemática, analisamos que resoluções de equações baseadas em frases como "isolar o *x*", "passar um número para o outro lado, trocando o sinal" ou "passar um número para o outro lado, colocando embaixo do que está lá" são regras relacionadas a um movimento de pegar um número e colocá-lo em outra posição, uma ação corporificada, e, ainda, acrescentar uma "mágica" de "trocar um sinal" ou "colocar embaixo". Chamamos de "mágica" essa modificação que é feita no termo que se movimenta porque, aos olhos do aluno, ela pode parecer tão inexplicável quanto uma mágica. A esse movimento, acrescido de uma mágica que modifica o termo movimentado, chamamos de **corporificação procedimental**[15] (LIMA; TALL, 2008).

As corporificações procedimentais podem levar um aluno ao sucesso, como o aluno que resolveu a equação $3x-1=3+x$ da forma apresentada na figura 5.

[15] Em inglês: *procedural embodiment*.

Figura 5 – Resolução para a equação 3x-1=3+x.



Fonte: Lima, 2007, p. 244.

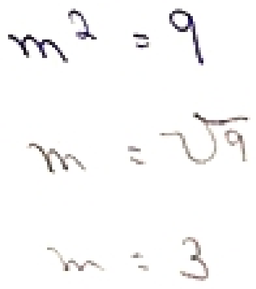
É possível que alunos que apresentem este tipo de resolução utilizem o princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os membros, uma característica do mundo formal. Porém, no caso, o aluno que apresentou tal resolução explicou

> [...] eu copiei o *3x*, passei o *x* que estava desse lado para o outro lado da, do sinal, aí ficou, tava positivo, ficou negativo. Aí eu copiei o sinal de igual, passei o um pra esse lado, tava negativo ficou positivo. Aí, já tava o *3*, eu copiei de novo. Aí, *3x* menos *x* deu *2x* igual a *4*. Aí *x* igual a *4* sobre *2*, deu *x* igual a *2*. (Trecho de entrevista com aluno. LIMA, 2007, p. 245).

Essa explicação traz características do mundo simbólico, pois fala de uma manipulação de símbolos. Porém, as ideias de "passar", "pegar", "copiar", presentes na fala dele e de outros, remetem-nos a movimentos que são característicos do mundo corporificado.

Também em equações quadráticas as corporificações procedimentais podem aparecer, como no trabalho de um aluno que apresenta sua resolução para a equação $m^2=9$ como na figura 6, em que faz uma avaliação da equação, todavia não obtém as duas raízes. A explicação dada por ele para o que faz é que *"a potência dois passa para o outro lado como raiz quadrada"*, isto é, uma nova corporificação procedimental, de movimentar um símbolo e acrescentar uma "mágica" de transformar uma potência em raiz.

Figura 6 – Resolução para a equação $m^2=9$.



Fonte: Lima, 2007, p. 273.

Essas falas de alunos sobre equações lineares são amplamente discutidas na literatura em Educação Matemática, mas não há menção de falas como essa última para quadráticas em outras pesquisas que conhecemos. Ainda assim, as discussões realizadas não trazem conclusões satisfatórias, além de falta de significado para símbolos algébricos. Com as análises realizadas à luz dos Três Mundos da Matemática, entendemos que os alunos dão significados corporificados aos símbolos matemáticos e às resoluções de equações com as quais se deparam. Dessa forma, entendemos que as corporificações procedimentais são o meio que eles utilizam para dar significado a esse trabalho. Ao criarem regras sem nenhuma relação com os princípios algébricos que governam a resolução de equações, eles correm o risco de gerar o que Sleeman (1984) chamou de *mal-rules*.

3. *MAL-RULES* EM ÁLGEBRA E A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

Nas décadas de 1980 e 1990, muitas foram as tentativas de se elaborar sistemas inteligentes de tutoria[16] para a detecção de erros de alunos ao trabalharem com resolução de equações, bem como para buscar a "instrução corretiva apropriada", que colaborasse para a superação desses erros pelos alunos. Essas tentativas necessitavam de modelos de comportamento dos aprendizes, e, para a obtenção desses modelos, buscava-se estudar tal comportamento. Foi nessa busca que Sleeman (1984) encontrou as *mal-rules*.

[16] Em inglês: Intelligent Tutoring Systems – ITS.

3.1. *Mal-rules*: o início da discussão

Sleeman (1984) fez um levantamento e uma classificação dos erros encontrados no trabalho de 24 alunos, com média de idade de 14 anos, considerados de habilidade mediana em Álgebra. A partir desse levantamento, Sleeman (1984) pode verificar a natureza dos erros dos alunos, e os chamou de *mal-rules*, isto é, "Regras que 'capturam' um erro observado, por exemplo, mudar o *lado* mas não o *sinal* de um número em uma equação algébrica" (SLEEMAN, 1984, p. 198, itálico do autor, tradução nossa).

Esse trabalho de pesquisa realizado pelo autor consistiu em um experimento de duas fases. Na primeira, os alunos resolveram um conjunto de tarefas contendo equações lineares com uma incógnita, apresentadas no Leeds Modelling System[17] (LMS-II). Quatro meses depois, na segunda fase, foi aplicado um teste com lápis e papel, e foram feitas entrevistas com alguns desses alunos. Para esse trabalho, foram apresentadas tanto equações de avaliação quanto de manipulação. Sleeman (1984) não faz qualquer diferenciação entre tipos de equação, ou menção da posição ou ocorrência da incógnita nas equações que usa para esse trabalho. Assim, para a análise dos dados coletados, não há qualquer referência sobre *mal-rules* sendo mais frequentes em um ou outro desses tipos de equação.

O autor considera que há diferentes tipos de *mal-rules*, de forma que classificar os erros dos alunos é importante porque permite "dar a instrução corretiva apropriada" (SLEEMAN, 1984, p. 403). Logo, as *mal-rules* por ele encontradas foram classificadas como sendo de **manipulação**, de **análise**, de **cálculo**[18] e **aleatórias**. Vale destacar que não foi apresentado neste trabalho do autor como se elabora a instrução "apropriada" mencionada por ele.

Uma *mal-rule* de **manipulação** é "[...] uma variação de uma regra correta que tem um subestágio omitido ou substituído por uma operação incorreta ou inapropriada" (SLEEMAN, 1984, p. 403, tradução nossa). Por exemplo, ao resolver $6x=4(2x+3)$, um sujeito pode deixar de efetuar uma multiplicação, fazendo $6x=4x+12$. Nesse exemplo, uma equação de manipulação foi transformada, e a propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição (uma característica do mundo formal) foi utilizada de maneira errônea. Entendemos que há, nessa transformação, uma falta de relação entre mundos simbólico e formal.

[17] Sistema desenvolvido pelo autor na Universidade de Leeds, Reino Unido.
[18] Em Inglês: *clerical mal-rules*.

Sleeman (1984) acredita que a omissão de passos durante a resolução de uma equação pode acarretar a ocorrência de *mal-rules* de manipulação. Isso pode estar ligado à falta de percepção dos símbolos matemáticos como conceitos, mas somente como processos (ou talvez somente procedimentos) considerando a necessidade de escrever todos os passos de uma resolução para que não ocorram *mal-rules*.

Mal-rules de *análise* acontecem quando um aluno não vê ou não analisa corretamente uma equação algébrica, o que, para o autor, parece vir de problemas de entendimento da notação algébrica. Por exemplo, quando a equação $6x=3x+12$ é resolvida fazendo-se $x+x=12+3-6$. De acordo com o autor, existe um mal-entendido com a notação algébrica, que foi analisada como soma, e não como multiplicação. Tal *mal-rule* também pode ser resultado da falta de compreensão do que Dreyfus e Hoch (2004) chamam de estrutura de uma equação.

Por outro lado, se levarmos em conta as corporificações procedimentais, parece-nos que, considerando que se deve "isolar o *x*", os coeficientes dos termos em *x* foram movimentados para o outro membro da equação, permitindo que o *x* ficasse isolado. Ao coeficiente 6 de *x* no primeiro membro foi acrescentada a mágica de se "trocar o sinal". O mesmo já não aconteceu com o *x* do termo em *x* que foi transportado do segundo membro para o primeiro, o que pode ser encarado como uma *mal-rule* de manipulação.

Mal-rules de *cálculo* são caracterizadas quando acontece o que o autor chama de **escorregões**[19]. Por exemplo, a equação $10x=25$ é resolvida como $x=\frac{25}{18}$, ou $2x=6\cdot5$ resolvida como $x=18$. Na primeira, o sujeito pode ter visto 0 como 8, enquanto na segunda, pode ter ocorrido algum erro aritmético. Considerando que elas são mais ligadas à aritmética do que a estruturas algébricas, elas são raramente discutidas nos trabalhos dos autores que mencionam *mal-rules*.

Por fim, *mal-rules aleatórias*, para o autor, são aquelas que não podem ser explicadas pelas *mal-rules* até então levantadas por ele em suas pesquisas. Ele conclui que a generalização de regras de maneira inapropriada pode ser um fator importante para explicar esses erros em Álgebra. Além disso, Sleeman (1984) acredita que alunos inferem regras a partir de exemplos, e não a partir de outras regras corretas. Por exemplo, em $3x=6$, o número maior é dividido

[19] Em Inglês: *slips*.

pelo número menor, resultando em x=2. Isso pode acarretar que, em exemplos como, *4x=2*, o aluno também divida o número maior pelo menor, resultando em um erro, fazendo $x = \frac{4}{2}$ e, então, *x=2*. Nesse exemplo, apresenta-se a resolução de uma equação de avaliação por manipulação. Em Lima e Tall (2008), conjecturamos que a divisão do número maior pelo menor, independentemente dos coeficientes apresentados na equação, é resultado da utilização de *já-encontrados* criados pelos alunos ao aprenderem que, no conjunto dos números naturais, não é possível dividir um número menor pelo maior. Dessa forma, entendem como errôneo ter $x = \frac{2}{4}$ como solução para a equação *4x=2*.

A análise dos dados coletados por Sleeman (1984) evidenciou que, apesar de muitos alunos terem cometido os mesmos erros precedentes, em geral, eles tiveram melhor desempenho com lápis e papel do que quatro meses antes com LMS-II. Além disso, nas entrevistas, foi constatado que alunos buscavam um valor para a incógnita (como tentativa e erro, e não como avaliação ao desfazer as operações efetuadas sobre a incógnita ou pela percepção de um número que satisfaz a equação) e isso fazia com que eles, ao resolverem, por exemplo, *3·x=2*, dessem como resultado *x=* -1.

Também ocorreram situações em que alunos dão diferentes valores para cada incógnita presente na equação e que eles acreditam que há maneiras diferentes de resolver uma mesma equação, mesmo que cada uma dessas diferentes maneiras resulte em valores diferentes para a incógnita. Tal crença implica falta de compreensão de características formais para a resolução de equações. Apresentaram *mal-rules* insistentes e consistentes. Apesar desses achados, os dados coletados nas entrevistas também evidenciaram alunos que foram capazes de usar regras corretas e de explicar a impossibilidade de usar as regras incorretas que eles mesmos usaram quatro meses antes.

3.2. *Mal-rules*: aprofundando a pesquisa

Em uma tentativa de estender e aprofundar o estudo sobre as *mal-rules*, Payne e Squibb (1990) fizeram uma análise dos protocolos de alunos entre 13 e 14 anos de três escolas de Lancaster (Reino Unido), com os objetivos de levantar as *mal-rules* por eles usadas, buscar quais mecanismos geram *mal-rules* e as implicações delas para os chamados *escorregões* (quando o aluno tem intenção de usar um procedimento correto, mas o faz de maneira incorreta) e *erros*[20] (quando tem a intenção de usar um procedimento incorreto). Nas três escolas, foram usados dois conjuntos de atividades diferentes, compostos por equações lineares com uma incógnita e com soluções inteiras. Todas as equações utilizadas são do mesmo tipo das usadas por Sleeman (1984).

Os alunos escolhidos para participar da pesquisa foram apontados pelos seus professores como capazes de responder pelo menos metade das questões corretamente, mas não todas. Na primeira escola, os dois conjuntos de atividades foram aplicados, cada um em uma aula de 50 minutos de duração. Em um deles, os alunos deveriam responder a todas as questões, enquanto, no outro, deveriam responder somente aquelas que eles tinham certeza de que conseguiriam responder corretamente. Na segunda escola, os mesmos dois conjuntos de atividades foram aplicados em duas aulas de 50 minutos de duração cada. Em ambos os conjuntos, os alunos deveriam responder todas as questões, mostrando os passos intermediários e dando um grau de confiança para cada resposta, de 1 a 5, em que 1 representa que o aluno tem pouca confiança de que a sua resolução está correta, e 5, que o aluno está confiante de que sua resolução está correta. Foram analisados no total os protocolos de 86 alunos.

Nesse estudo, foram levantadas 99 *mal-rules*, inclusive algumas diferentes das levantadas em estudos anteriores por outros pesquisadores. Dentre as *mal-rules* apresentadas por Payne e Squibb (1990), temos, por exemplo, que $ax+b(x+c)=dx$ é transformada em $ax\cdot(x+c)=dx-b$, ou mesmo $ax=b$ transformada em $x=b+a$. Esta última também foi reportada por Cortés e Kavafian (1999).

O primeiro exemplo dado é uma equação de manipulação, enquanto o segundo é uma equação de avaliação. Ambas, entretanto, foram resolvidas como se fossem de manipulação, pois os termos parecem ter sido movidos de um membro a outro. Entendemos que, mesmo tendo elas diferentes características, o mesmo tipo de erro, ou *mal-rule*, é relatado. "Passa-se para o outro lado" um número sem que seja feita uma relação entre esse "movimento" e características do mundo formal. Outra *mal-rule* frequente na pesquisa de Payne e Squibb (1990) é a troca de membros, mas não a troca de sinais, como, em $ax+b=cx+d$, que é transformada em $ax+cx=b+d$, que também pode ser explicada pela mesma dificuldade de se trabalhar com o mundo formal.

[20] Em Inglês: *mistakes*.

Os autores concluem que os erros por eles encontrados não se classificam em escorregões ou erros, mas são uma composição de ambos. Ainda, que os erros apresentados não são simplesmente de natureza sintática, pela dificuldade de manipulação de símbolos, que, para eles, é puramente formal. Existem restrições semânticas: para eles, o significado atribuído aos símbolos interfere no uso de *mal-rules*. Entretanto, eles não discutem quais significados podem ser atribuídos aos símbolos matemáticos.

Payne e Squibb (1990) concluem também que, ao contrário do que afirmou Sleeman (1984), a ocorrência da mesma *mal-rule* não é frequente. *Mal rules* são instáveis e podem não ocorrer em todos os tipos de tarefa que as suportaria. Esse resultado também contradiz os invariantes operatórios levantados por Cortés e Pfaff (2000), no que se refere às regras usadas pelos sujeitos de pesquisa desses últimos pesquisadores. No caso da pesquisa deles, o mau uso de regras também não aconteceu sempre com a mesma frequência, nem em todas as tarefas em que elas poderiam ocorrer. Ainda, existem alguns alunos, chamados por Payne e Squibb (1990) de "idiossincráticos", cujos erros não podem ser explicados por *mal-rules*, por exemplo aqueles em que duas ocorrências da incógnita resultam em dois valores diferentes sendo atribuídos a ela.

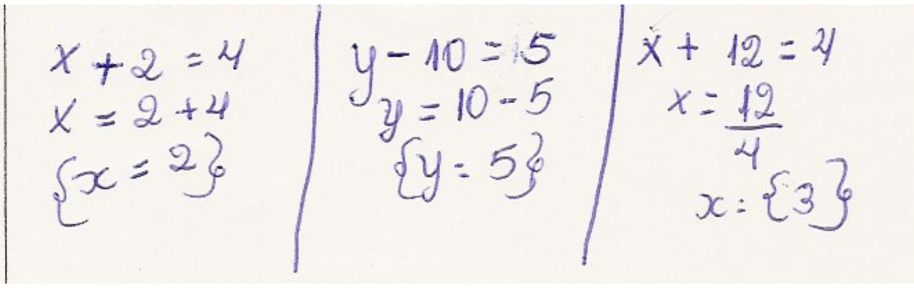
3.3. Uma discussão sobre o uso de *mal-rules* na resolução de equações

A discussão de Sleeman (1984) para *mal-rules* apresentadas pelos participantes da sua pesquisa para a resolução de equações parece evidenciar que a origem delas está em interpretações de frases como "isolar o *x*", "passar para o outro lado e mudar o sinal" ou "passar para o outro lado e colocar embaixo do que está lá". Tais frases acabam por se tornar regras, que Linchevski e Sfard (1991) acreditam ser sem sentido para os alunos os quais as utilizam.

A partir do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, compreendemos que essas regras carregam consigo ideias corporificadas de que um símbolo matemático pode ser "pego" e "colocado" do outro lado de uma equação. Entretanto, não é possível simplesmente fazer essa transposição de termos, pois ela deve ser acompanhada de uma "mágica" de "mudar o sinal", ou "colocar embaixo", como definimos nas corporificações procedimentais. Payne e Squibb (1990) também afirmam que os erros cometidos pelos alunos estão principalmente relacionados ao significado incorreto que eles dão a equações, e não a manipulação incorreta de símbolos.

Em Lima e Tall (2006), discutimos diferentes significados dados por alunos a equações e aos símbolos que as formam. No caso do uso de *mal-rules*, entendemos que, sendo uma regra desconectada de características do mundo formal, o aluno pode perder o discernimento de em qual situação uma dada "mágica" é mais apropriada que a outra. Assim, ele pode acreditar ser possível resolver uma mesma equação de maneiras diferentes, que resultam em diferentes raízes. Por outro lado, ele também pode acreditar que equações com a mesma estrutura podem ser resolvidas de maneiras diferentes, como os exemplos de equação dados por um aluno de ensino médio (Figura 7), em que ele resolve três equações na forma $ax+b=c$, com $a,b,c \in \mathbb{Z}$ utilizando regras diferentes.

Figura 7 – Resoluções para equações lineares.



Fonte: Lima, 2007, p. 175.

4. EM BUSCA DE SOLUÇÃO PARA *MAL-RULES*: ALGUMAS ABORDAGENS DE ENSINO

Nossa crença é a de que não somente devemos detectar os erros cometidos pelos alunos e buscar meios de compreender porque eles acontecem, mas também buscar maneiras de colaborar para que eles possam ser superados. Como relatamos, Sleeman (1984), Payne e Squibb (1990) não mencionam como uma "instrução apropriada" pode ser feita. Já Freitas (2002) sugere que se dê significado aos símbolos utilizados em equações, sem também discutir que tipo de significado este deve ser. Nossa conjectura é a de que os significados dados são corporificados, e as regras ligadas ao mundo simbólico estão desconectadas de características do mundo formal.

Duas abordagens de ensino para equações lineares parecem ser mais discutidas na literatura em Educação Matemática. Uma delas é de ensino por meio do modelo geométrico de comparação entre áreas de figuras planas (retângulos) e a outra, o modelo da balança, que é baseado em uma balança de dois pratos, em que cada prato representa um dos membros da equação e o equilíbrio entre os pratos representa a igualdade. Ambos os modelos usam entidades físicas ou representações associadas a elas. Esses modelos concretos podem dar algum tipo de significado físico para os símbolos algébricos a eles associados. Equações, tanto de avaliação quanto de manipulação, podem ser discutidas e ensinadas por meio deles. Muitos são, porém, os pesquisadores que discutem esse tipo de modelo. Dentre eles, estão Filloy e Rojano (1989) e Vlassis (2002).

Ao trabalharem com esses modelos concretos, Filloy e Rojano (1989) observaram, entre outras considerações, a perda temporária de habilidade para resolver equações que chamamos de avaliação, a fixação no modelo e a presença de obstáculos peculiares a cada um deles, como, o uso de números não inteiros no modelo geométrico e o uso de números negativos no modelo da balança. Além disso, a automatização com os modelos acarretou erros associados à sintaxe algébrica, como, por exemplo, somar ou subtrair coeficientes de incógnitas com graus diferentes.

Vlassis (2002) percebe, também, dificuldades dos alunos pesquisados em desconectar a resolução da equação do modelo da balança, isto é, de transpor as ideias corporificadas utilizadas para o mundo simbólico, e que ainda tinham problemas com números negativos. A autora conjectura que a dificuldade dos alunos pode estar no grau de abstração da equação.

Para Vlassis (2002), o modelo da balança foi uma metáfora útil para todos os alunos participantes da pesquisa darem significado ao sinal de igual como uma igualdade entre os dois membros da equação, bem como compreenderem o método de efetuar a mesma operação em ambos os membros. Entretanto, o modelo falha em ser significativo para muitos alunos, em situações mais gerais, envolvendo subtrações e números negativos. Fazer relação com um modelo concreto pode ser suporte em situações em que ele é diretamente aplicável, mas pode causar um impedimento quando ele não mais se aplica em um contexto diferente.

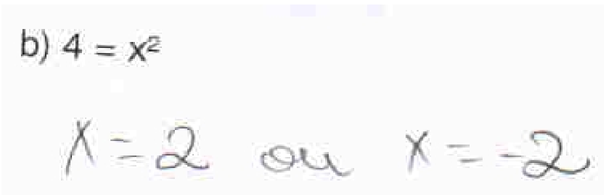
Considerando as dificuldades apresentadas com o uso de modelos concretos para o ensino de equações, buscamos abordagens que enfatizassem características de outros mundos, não somente o corporificado, como é o caso dos modelos concretos. Uma possibilidade seria permitir que o próprio aluno utilizasse seus *já-encontrados* para resolver equações. Para isso, Koch (2010) apresentou equações quadráticas de avaliação e de manipulação a grupos de dois ou três alunos de 8º ano do Ensino Fundamental, totalizando 10 alunos de uma escola pública de Jundiaí/SP.

Um total de 14 equações, 10 de avaliação e quatro de manipulação, foram apresentadas uma a uma a cada um dos grupos, e foi solicitado que eles descobrissem como resolvê-las. Vale ressaltar que esses alunos ainda não haviam estudado a resolução de equações quadráticas.

Gostaríamos que, sem ter como *já-encontrado* uma fórmula ou um método específico de resolução, esses alunos pudessem pensar em maneiras de resolver equações quadráticas que relacionassem características do mundo formal a características simbólicas e talvez até corporificadas. Isso permitiria que eles fizessem uma jornada pelos Três Mundos da Matemática que enriqueceria a sua imagem de conceito de equação.

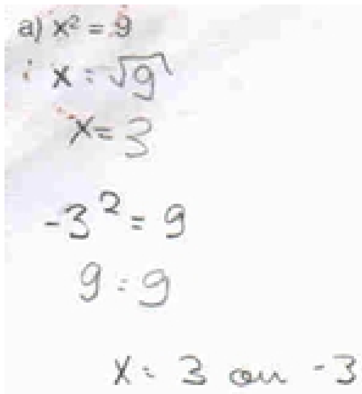
Os resultados evidenciaram que as resoluções apresentadas pelos alunos participantes para as equações de avaliação foram baseadas em dois tipos de avaliação: aquelas em que eles percebiam uma ou ambas as raízes (como na Figura 8), e aquelas em que eles desfaziam as operações efetuadas sobre a incógnita (como na Figura 9).

Figura 8 – Resolução para a equação $4 = x^2$.



Fonte: Koch, 2010, p. 90.

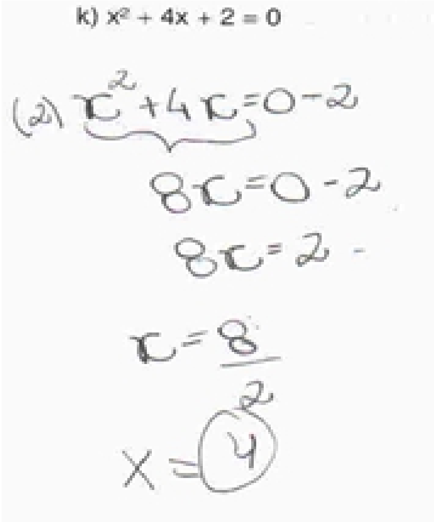
Figura 9 – Resolução para a equação $x^2 = 9$.



Fonte: Koch, 2010, p. 91.

Já as equações de manipulação trouxeram muitas dificuldades para os alunos. Os *já-encontrados* deles não foram suficientes para que trabalhassem com esse tipo de equação. Por exemplo, apesar de terem estudado fatoração e quadrados perfeitos, eles não utilizaram esses conhecimentos para transformar as equações quadráticas de manipulação para resolvê-las. Isso gerou a utilização de regras ou *mal-rules* que até mesmo não são apropriadas para quadráticas, como se apresenta na figura 10.

Figura 10 – Resolução da equação $x^2+4x+2=0$.



Fonte: Koch, 2010, p. 128.

Com esta pesquisa, foi percebido que é possível aos alunos relacionar princípios algébricos à resolução de equações, por exemplo, que o valor de incógnita deve satisfazer a equação, bem como o mesmo valor deve ser substituído em todos os termos que tenham a incógnita. Por outro lado, também se evidenciou que a manipulação algébrica, parte do mundo simbólico, necessária para a resolução de equações quadráticas não se faz presente na imagem de conceito desses alunos. Mais discussão sobre a relação entre manipulações algébricas conhecidas e a resolução de quadráticas se faz necessária.

Essas dificuldades com o mundo simbólico também foram percebidas em Santos (2011), em cuja pesquisa a mesma estratégia de colocar os alunos em tentativas de resolver equações quadráticas foi utilizada. Entretanto, desta vez, foi utilizado o *software* Aplusix[21] para a resolução de equações. Esse *software* enfatiza principalmente a manipulação simbólica, então entendemos que ele colocaria o mundo simbólico em evidência. Foi observado que, da mesma forma que em Koch (2010), as equações de manipulação foram aquelas em que os alunos apresentaram maiores dificuldades, justamente por não terem familiaridade com essa

21 <http://www.aplusix.com>.

manipulação. Por outro lado, diferentemente do que em Koch (2010), os alunos participantes da pesquisa de Santos (2011) também tentaram resolver equações de avaliação por meio de manipulações simbólicas, gerando *mal-rules* ou corporificações procedimentais justamente pela dificuldade ou pelo desconhecimento de como lidar com o mundo simbólico. Observa-se, então, que a ênfase no mundo simbólico não permitiu que relações entre ele e o mundo formal fossem estabelecidas.

5. FINALIZANDO NOSSAS REFLEXÕES

Neste texto, apresentamos as *mal-rules* criadas por Sleeman (1984) e depois estendidas por Payne e Squibb (1990) para explicar erros efetuados por alunos na resolução de equações lineares. Fizemos, também, uma discussão à luz dos Três Mundos da Matemática, que possibilitou um novo olhar sobre elas. Além disso, apresentamos algumas abordagens de ensino que procuraram ajudar alunos a superá-las.

Nessa nossa jornada pelos mundos matemáticos tentando explicar e refletir sobre *mal-rules*, percebemos que elas parecem ser inerentes ao trabalho dos alunos com equações, isto é, mesmo sendo geradas diferentes *mal-rules* em diferentes escolas, como relatado por Payne e Squibb (1990), ainda assim são geradas *mal-rules*.

Apesar de Sleeman (1984) ter distinguido quatro categorias de *mal-rules*, entendemos que três delas (com exceção das *mal-rules* de cálculo) têm características similares e podem ser explicadas pelas corporificações procedimentais. Isso nos permite compreender os significados dados a alunos a equações e aos símbolos que as compõem, e também aos passos de resolução que eles efetuam. Não estando conscientes da ligação entre as regras que conhecem e os princípios algébricos que regem a resolução de equações, os alunos pesquisados parecem dar significados corporificados aos símbolos, já não os veem, pois, como proceitos, como esperado. Eles são entidades físicas que podem ser movimentadas de um lado a outro. Sendo assim, qualquer das regras pode ser utilizada em qualquer momento, então um termo qualquer, ou mesmo o coeficiente de um termo “passa para o outro lado” “mudando o sinal”, “embaixo do que está lá”, ou qualquer outra mágica que julgue aplicável.

O uso dessas regras prejudica o desenvolvimento de uma imagem de conceito rica, não somente pelos problemas causados por elas em resolver equações, mas também por elas não conterem elementos que relacionem todos os mundos matemáticos. Uma imagem de conceito desenvolvida somente por regras dificulta até mesmo que algum *a-encontrar* encoraje o aluno a refletir sobre seu entendimento de equações, questioná-lo ou modificá-lo.

O mais importante, a nosso ver, é notar a falta de características formais no trabalho desses alunos. Todas as pesquisas relatadas neste capítulo afirmam que raramente um aluno explicita os princípios algébricos necessários para a resolução de equações. Sem eles, não se pode compreender a manipulação algébrica característica do mundo simbólico e tão necessária para equações. Como se vê, principalmente com equações quadráticas, a falta de familiaridade com o mundo simbólico e a compreensão dos símbolos como proceitos impedem o desenvolvimento de conceitos algébricos que traga sucesso ao se lidar com eles, e não colabora com o desenvolvimento de uma imagem de conceito rica.

Nossas tentativas de abordagens de ensino para equações não foram completamente satisfatórias, mas nos permitiram compreender que é preciso enfatizar as relações existentes entre os mundos corporificado, simbólico e formal, pois, sem essas relações, tendo o foco em características de somente um deles, *mal-rules* ou outras formas de erros são criados, impedindo o desenvolvimento cognitivo do aprendiz no que se refere a equações.

REFERÊNCIAS

CORTÉS, A.; KAVAFIAN, N. Les principes qui guident la pensée dans la résolution des equations. **Petit X**, Grenoble, n. 51, p. 47-73,1999.

CORTÉS, A.; PFAFF, N. Solving equations and inequations: operational invariants and methods constructed by students. In: **Proceedings** of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Hiroshima, Japão: [s.n.], 2000, p. 193-200.

DREYFUS, T.; HOCH, M. Equations - a structural approach. In: **Proceedings** of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Bergen, Norway: [s.n.], 2004. p. 152-155.

FILLOY, E.; ROJANO, T. Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. **For the Learning of Mathematics**, Montreal, v. 9, n. 2, p. 19-25, Jun. 1989.

FREITAS, M. A. **Equação do primeiro grau:** métodos de resolução e análise de erros no ensino médio. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

GRAY, E.; TALL, D. O. Duality, Ambiguity and Flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. **The Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 2, p. 115-141, 1994.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies of Mathematics**, Dordrecht, n. 12, p. 317-326, 1981.

KOCH, R. M. **Uma Introdução ao Estudo de Equações Quadráticas à luz dos Três Mundos da Matemática**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

LIMA, R. N. de. **Equações Algébricas no Ensino Médio:** uma jornada por diferentes mundos da matemática. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LIMA, R. N. de; HEALY, L. Revisitando o corte didático em álgebra: Uma questão de conexão entre os mundos corporificado e simbólico? **Boletim GEPEM**, n. 57, p. 15-34, jul./dez. 2010.

LIMA, R. N. de.; TALL, D. O. What does equation mean? A brainstorm of the concept. In: **Proceedings** of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics. Istambul, Turquia: [s.n.], 2006.

LIMA, R. N. de.; TALL, D. Procedural Embodiment and Magic in Linear Equations. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 1, p. 3-18, 2008.

LINCHEVSKI, L.; SFARD, A. Rules without reasons as processes without objects - The case of equations and inequalities. In: **Proceedings** of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Assisi, Itália: [s.n.], 1991. p. 317-324.

PAYNE, S. J.; SQUIBB, H. R. Algebra Mal-Rules and Cognitive Accounts of Error. **Cognitive Science**, Austin, n. 14, p. 445-448, 1990.

SANTOS, R. P. dos. **O papel do software Aplusix na transição de equações de avaliação para equações de manipulação:** o caso das equações quadráticas. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

SLEEMAN, D. An attempt to understand students' understanding of basic algebra. **Cognitive Science**, Austin, n. 8, p. 387-412, 1984.

TALL, D. O. Thinking through three worlds of mathematics. In: **Proceedings** of the 28th Meeting of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Bergen, Norway: Bergen, 2004. p. 281-288.

TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically:** Exploring the Three Worlds of Mathematics. New York: Cambridge University Press, 2013. 457p.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.

THOMAS, M. O. J.; TALL, D. O. The long-term cognitive development of symbolic algebra. In: **Proceedings** of the International Congress of Mathematical Instruction Working Group. Melbourne: ICMI, 2001. p. 590-597.

VLASSIS, J. The Balance Model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. **Educational Studies in Mathematics**, n. 49, p. 341-359, 2002.

WARREN, E.; COOPER, T. J. Young children's Ability to Use the Balance Strategy to Solve for Unknowns. **Mathematics Education Research Journal**, v. 17, n. 1, p. 58-72, 2005.

CAPÍTULO 3

PARA FALAR EM ERRO[22]: UM MOSAICO[23]

Regina Luzia Corio de Buriasco
Andréia Büttner Ciani

A avaliação realizada na sala de aula deve ser entendida como um processo único e contínuo, que se inicia no primeiro dia de aula e só termina no último, uma vez que visa auxiliar os processos e progressos da aprendizagem do aluno e do professor ocorridos durante todo o ano letivo. Essa é a orientação presente, já nos anos 1990, em documentos norteadores da prática pedagógica, como, por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) que apontam perspectivas para objetivos, funções e instrumentos de avaliação. No entanto, a avaliação escolar praticada ainda hoje em um grande número de escolas parece estar mais voltada ao cumprimento de normas burocráticas, classificação, punição dos alunos. Ou seja, a mudança do discurso sobre as perspectivas de avaliação, presente nos documentos curriculares ou em estudos publicados, não tem sido suficiente para provocar uma efetiva mudança na prática avaliativa. A avaliação ainda se apresenta como uma "pedra no caminho" de professores e alunos.

A avaliação como prática de investigação é uma alternativa para a reconstrução do processo de avaliação que tem o sentido de promover uma comunicação entre os participantes dos processos de ensino e de aprendizagem e entre as diferentes maneiras de lidar[24] com os conhecimentos presentes

[22] Para este texto, tomou-se como base estudos desenvolvidos no interior do GEPEMA, parte da sua produção, que geraram dissertações e teses, em particular o de Ciani (2012). Esse grupo tem se debruçado sobre uma perspectiva de avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem e sobre a análise da produção escrita em questões de matemática resolvidas por alunos e por professores. O Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação – GEPEMA – está constituído no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina - PR. Disponível em: <http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/>.

[23] Trabalho composto de pedaços justapostos.

[24] "Maneiras pelas quais os sujeitos interpretam o enunciado, elaboram estratégias e utilizam procedimentos para resolver uma questão, que, em muitos casos, são resultantes de processos sistemáticos, tanto sintáticos como semânticos, os quais eles próprios constroem." (VIOLA DOS SANTOS, 2007, p. 22).

no ambiente escolar, quer sejam dos alunos, quer dos professores, para com isso interpretar e comunicar aos alunos e professores os indícios de seus múltiplos conhecimentos e de suas maneiras de lidar com as situações escolares. Essa necessária reconstrução faz parte de uma prática pedagógica comprometida com o respeito às diferenças, com a inclusão, entre outros.

Nessa direção, segundo Buriasco e Soares (2008, p. 110), "a avaliação da aprendizagem matemática deve ser vista como um processo de investigação, uma atividade compartilhada por professores e alunos, de caráter sistemático, dinâmico e contínuo". Nesse processo, pode-se utilizar diferentes instrumentos, contudo, a prova escrita ainda tem sido o mais utilizado, sendo muitas vezes o único. Instrumentos não são inerentemente bons ou ruins, uma vez que o valor de um instrumento está na utilização que se faz dele. Para Hadji (1994, p. 168), um instrumento adequado para avaliação é aquele que permite um dialogar com o aluno enquanto está envolvido com sua aprendizagem.

Mesmo utilizando uma prova escrita, por meio da análise da produção escrita de alunos, os professores podem sair de uma cultura que utiliza um *modus operandi* baseado no Princípio do Terceiro Excluído[25] "correto/incorreto", intimamente ligada à exclusão e à competição, para uma cultura de reconhecer uma multiplicidade de maneiras de lidar com o conhecimento e, por meio dessa prática, buscar reconhecer que a complexidade e a heterogeneidade podem ajudar a ampliar os modos de produzir significados. Segundo Buriasco e Soares (2008, p. 111),

> ao incentivar o professor a registrar, comparar e analisar a produção de seus alunos, no dia a dia da sala de aula, tem-se como perspectiva valorizar o diálogo sobre as investigações que tanto ele quanto seus alunos fazem a respeito do conhecimento matemático, durante o processo de aprender e ensinar matemática na escola.

Por conseguinte, além de a análise da produção escrita se apresentar como uma estratégia para implementação da avaliação como prática de investigação, ela se mostra como um caminho para conhecer múltiplos aspectos da atividade matemática dos alunos e, também, como uma possibilidade para capacitar o professor e reorientar sua prática pedagógica, inclusive para estabelecer conexões entre um modo particular de representar utilizado com um mais formal.

[25] Uma coisa ou é verdadeira ou é falsa, não havendo outra possibilidade.

O papel do contexto das tarefas de avaliação no desempenho dos alunos é um aspecto da atividade matemática deles, propício de ser investigado por meio da produção escrita. Como uma tarefa elaborada em contexto estritamente matemático, ou em um fantasioso, ou em um da vida cotidiana, ou em um com uma roupagem da vida "prática", pode influenciar o desempenho dos alunos? Os contextos dessas tarefas oportunizam acessibilidade para os alunos interpretarem o enunciado, elaborarem estratégias, utilizarem procedimentos e apresentarem uma resposta? Essas inquietações estão presentes em trabalhos de participantes do GEPEMA que tratam dessa temática relacionada à avaliação como prática de investigação e à atividade matemática dos alunos.

A preocupação com os contextos dos problemas no ensino e na aprendizagem de Matemática permeia grande parte da obra de Freudenthal. Os contextos estão relacionados com as situações que podem originar algum problema. Esse autor defende que o contexto dos problemas pode exercer uma influência direta na maneira de lidar com eles e classifica os contextos dos problemas em matematicamente ricos ou pobres. Um contexto é tanto mais rico quanto mais possibilidades de matematização ele propicia ao estudante.

Os trabalhos de Kastberg et al. (2005) e de D'Ambrosio et al. (2004) indicam que os contextos podem representar um papel intermediário no que se refere a privilegiar um domínio de conhecimentos em relação a outro ou de estabelecer relações entre eles. Analisando alguns itens considerados contextualmente ricos, essas autoras apontam que, em alguns casos, os alunos privilegiam o domínio de conhecimento matemático em relação ao de história, em uma questão que envolve esses dois domínios. Em outros casos, eles negociam algumas construções de diferentes domínios do conhecimento e, nesses casos, há evidências de tentativas de integração entre os domínios. Isso pode indicar que o contexto do problema que envolve diferentes áreas de conhecimento parece exercer influências nos processos de resolução dos alunos.

A consideração de que a matemática também deve ser útil para pessoas comuns na vida diária acarretou colocar mais ênfase na relação entre a matemática e o mundo cotidiano e essa é uma tendência que aparece em propostas curriculares com frequência. A par disso, criou-se também um viés na compreensão da expressão realística tomando-a como sinônimo de cotidiano. A expressão "realística" refere-se não apenas a uma conexão com o mundo real, mas principalmente à ideia de oportunizar aos estudantes situações que eles possam imaginar. Em textos de autores da Educação

Matemática Realística (RME), a tradução do verbo holandês "zichREALISEren" é "imaginar". Então, o sentido de tornar algo "real" na mente dos estudantes é que dá à RME esse nome. Situações realísticas não são restritas ao mundo físico ou social, são aquelas que o estudante pode imaginar de modo a oportunizar alguma matematização.

Na perspectiva da RME, as situações realísticas são utilizadas como fonte e como área de aplicação para o ensino de matemática e para a avaliação, cujo objetivo principal é contribuir com o processo de aprendizagem, favorecendo, por exemplo, a superação de dificuldades desse mesmo processo. Por meio dela, o professor busca informações, pistas, indícios a respeito dos processos de aprendizagem dos estudantes, a fim de que essas informações orientem as tomadas de decisões educacionais particulares (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). Desse modo, a avaliação é utilizada para regular e guiar o processo de aprendizagem.

A avaliação é uma das práticas educativas presentes na sala de aula e, apesar de não ser possível pensar em mudanças na educação sem pensar em mudanças na avaliação, não se pode esquecer de que

> [...] mudança efetiva na avaliação em sala de aula representa mudança na concepção: do processo de ensino e aprendizagem, do papel do professor e do aluno, de como o professor lida com conteúdos que ensina, de como compreende a maneira como os alunos lidam com esses mesmos conteúdos entre outras mudanças. (BURIASCO; SOARES, 2008, p. 113).

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) considera que a avaliação de caráter formativo é a forma desejável de avaliação na RME e menciona que Freudenthal, em 1976, já era fortemente a favor dessa forma de avaliação que pode ser favorecida, por exemplo, por meio da utilização de problemas adequados; da análise da produção escrita dos estudantes; do fornecimento de *feedbacks* aos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem; da condução de discussões com os estudantes. Essa mesma autora afirma que a avaliação proposta na perspectiva da RME pode ser descrita como "avaliação didática", ou seja, o propósito, o conteúdo, os métodos aplicados e os instrumentos utilizados são de natureza didática. Afirma também que o conteúdo da avaliação deve ser abrangente no que se refere a cobrir todos os níveis de compreensão que os alunos tenham.

Freudenthal (1973), Van den Heuvel-Panhuizen (1996) e De Lange (1999) enfatizam a importância da avaliação no ensino da Matemática. Para eles, a avaliação não deve ter como objetivo primeiro certificar, selecionar ou classificar os alunos, mas fornecer informações para que os professores possam aprimorar suas práticas de ensino a fim de que os alunos tornem-se matematicamente letrados, "autores" de seu conhecimento, lembrando sempre que uma das metas fundamentais da educação é o desenvolvimento da autonomia. Segundo os mesmos autores, o estudante tem o direito de saber se ele realmente aprendeu alguma coisa e, para isso, a avaliação deve fornecer *feedbacks* genuínos a respeito dos seus processos de aprendizagem.

Tomando a avaliação nessa configuração, observar um estudante durante sua atividade matemática é mais informativo do que atribuir notas aos seus trabalhos escritos, uma vez que os estudantes podem passar por vários níveis de matematização, apoiados na utilização de contextos e modelos, o que favorece o desenvolvimento de sua própria matemática, e, quando se coloca muita importância em um trabalho pontual apenas para a atribuição de uma nota, há o risco de o programa curricular se adequar ao ensino apenas para que os alunos se saiam bem nos exames.

As características da avaliação na RME são apresentadas por Van den Heuvel-Panhuizen (1996) como sendo uma representação de sua natureza didática e, nela, do papel crucial atribuído às tarefas. Algumas dessas características são:

- a finalidade primeira e principal da avaliação é reforçar a aprendizagem e o ensino;
- os métodos e os instrumentos de avaliação devem ser tais que permitam ao aluno demonstrar mais o que sabe do que o que ele não sabe;
- a utilização de diferentes instrumentos de avaliação é necessária já que todos os níveis de competências devem ser avaliados e não só as de nível mais elementar;
- os estudantes devem ter oportunidades para receber *feedback* real a respeito do seu trabalho;
- a qualidade das tarefas de avaliação não é determinada pela sua proximidade com o objetivo de pontuação, ou, pela frequência de acerto, mas pela sua autenticidade, equidade, pela medida do atendimento de seu caráter didático.

De acordo com esses princípios, a avaliação não deve ser feita apenas para cumprir as exigências burocráticas da escola, por exemplo, para informar os pais sobre o desempenho de seus filhos, para rotular os alunos em bons ou maus.

Na perspectiva da RME, é desejável que os estudantes tenham um papel ativo na construção de seu conhecimento matemático, de modo que, com isso, aprendam a “fazer matemática” como uma realização, ou seja, matemática como um processo, uma ação, uma maneira de proceder, não como uma ciência estática, pronta e acabada. Matemática como o “realizar” e não como o resultado. Por meio da matematização, o aluno pode mostrar o que sabe. Uma tarefa de avaliação apropriada é aquela que contempla problemas os quais possibilitem matematização, que pode ser resolvida em diferentes níveis de compreensão e oferece oportunidade para os alunos construírem suas próprias respostas, assim, tanto os que já dominaram o conteúdo em um nível desejado quanto os que ainda estão nesse processo podem se envolver com a tarefa.

Engana-se quem pensa que trabalhar situações matematizáveis com os alunos acontece na forma “cada um por si”. As discussões em sala de aula proporcionam um ambiente no qual os alunos são incentivados a organizar, mostrar e defender suas produções, ideias e argumentos, tanto para o professor, quanto para os outros colegas, e assim podem ser consideradas, também, como fonte importante para a coleta de informações sobre o poder matemático dos alunos. Além disso, esse tipo de interação em sala de aula possibilita a exploração de diferentes estratégias para abordar as tarefas, diferentes resoluções e respostas para um mesmo problema, contribuindo para a visão da matemática como atividade humana.

Na RME, observações dos professores relativas às ações dos alunos podem ser tomadas como uma prática de avaliação, pois fornecem informações do processo que vão além de simples percepções comportamentais, uma vez que focam a compreensão, as estratégias e os *insights* durante a realização das tarefas. Como as observações acontecem enquanto os alunos estão envolvidos nas tarefas, as informações obtidas por meio delas podem gerar intervenções imediatas para ajudar os alunos nos seus processos de aprendizagem. Observações sistemáticas dos estudantes fazendo matemática, de como eles trabalham buscando elaborar suas próprias respostas, são indicadores mais autênticos da sua aprendizagem do que testes compilados pela totalização do número de respostas corretas. Daí a importância dada às discussões e à observação como fontes de informação para os processos de ensino e de aprendizagem.

Na avaliação escolar, uma ideia comum, quando se utiliza o instrumento prova escrita, é a de que algumas questões devem ser pouco acessíveis aos alunos com o intuito de assegurar a sua "eficácia". Contudo a eficácia da avaliação refere-se a fornecer informações confiáveis e quanto mais informações os alunos tiverem sobre como são avaliados, melhor poderão mostrar o que sabem de maneira possível de ser identificada. Na perspectiva proposta pela RME, considera-se que os alunos aprendem melhor com um processo de avaliação transparente e aberto, no qual alunos e professores discutem e negociam uma espécie de contrato de avaliação. Nessa perspectiva, a proposta de como se desenvolverá o processo de avaliação, incluindo pontuação e classificação, se houver, deveria ser aberto aos estudantes. Por meio de um contrato de avaliação, o professor pode explicar suas intenções e objetivos aos alunos, apresentar a maneira como costuma pontuar as suas produções.

Uma ação necessária à prática docente para ajudar os alunos na sua aprendizagem é a de fornecer-lhes *feedback*. Isso significa dar informações confiáveis que descrevam e gerem discussão a respeito do desempenho dos alunos em determinada situação ou atividade. Uma das intenções de fazer isso é a de servir de mote para a reflexão crítica da aprendizagem, indicada pelo desempenho do aluno observado pelo professor.

Um *feedback* pode gerar conscientização significativa à medida que pode provocar, no aluno, uma participação mais ativa na regulação da sua aprendizagem. A falta de *feedback*, muitas vezes, causa no aluno uma falta de confiança e um sentimento de "estar perdido", sem saber o que fazer diante de sua produção. A ação de o aluno rever a estratégia adotada, os procedimentos desenvolvidos, as decisões tomadas, suas conclusões, pode ser originada por um *feedback* no contexto de uma prática reflexiva. O poder de um *feedback* depende da qualidade das informações obtidas por meio de instrumentos consistentes e confiáveis, da responsabilidade recíproca entre professor e aluno na busca da aprendizagem.

Para De Lange (1999), sem o apropriado *feedback*, o papel da avaliação como contribuinte do processo de aprendizagem fica ameaçado. Um aluno que realiza uma prova escrita e recebe como *feedback* de sua produção apenas um número, por exemplo, 6, não recebe informações suficientes e necessárias para que possa entender a qualidade da sua produção, nem meios para que possa retomá-la. Com o "6", ele recebe apenas a informação de que a lacuna entre sua produção e a produção ideal é de medida "6", ou seja, ainda lhe faltam "4" para aprender. Mas, qual o real significado do "6" e do "4"? No que essa informação contribui para o seu processo de aprendizagem? Como o "6" indica o que ele, aluno, deve fazer para chegar ao tão desejado "10"? Perguntas similares valem para o professor.

Feedbacks adequados são aqueles que trazem informações fidedignas a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem, informações baseadas nas diferenças tangíveis entre o que o aluno mostra e o que se espera dele, na busca de contribuir para as próximas ações. Consequentemente, eles trazem mais informações a respeito do que os alunos mostram saber do que sobre o que ainda não sabem, e são essas informações que o professor utiliza para reorientar o trabalho pedagógico. Contudo, o problema não reside na utilização de notas na avaliação, mas na maneira como ela tem sido realizada e interpretada. Muitas vezes, a nota atribuída pelo professor e a nota recebida pelo aluno são interpretadas de maneira diferente, pois, ou os critérios do professor não estão bem definidos, ou eles não são acessíveis aos alunos. Com isso, pelo menos parte da informação se perde e a comunicação que deveria acontecer não acontece.

Na avaliação escolar (DE LANGE, 1999), a qualidade da tarefa, daquilo que foi proposto para o aluno fazer, pode ser definida pela autenticidade e equidade e, mais importante que a "precisão matemática" de uma nota, ou a garantia de que um problema será interpretado da mesma maneira em diferentes momentos, são as inferências sobre a possibilidade de as tarefas propiciarem oportunidades para todos os alunos se envolverem com elas e mostrarem sua compreensão e poder matemático. Além disso, possibilitarem maneiras de os professores conhecerem essa compreensão e poder matemático para que possam reorientar suas práticas e auxiliar os alunos nos seus processos de aprendizagem.

A produção escrita não deixa de ser uma forma de comunicação e, como tal, deve receber mais atenção por parte dos professores, até porque, com frequência, essa é uma das poucas formas de comunicação existente com os alunos. Segundo Buriasco (2004), a análise da produção escrita pode ser tomada como uma alternativa para o professor interrogar-se a respeito de como os alunos lidam com as tarefas que executam, que compreensão fazem do enunciado dela, se as informações contidas no enunciado fazem parte de um conjunto de circunstâncias que tornam a tarefa realística para o aluno.

Na perspectiva da análise da produção escrita como prática de investigação, busca-se ter mais familiaridade com os registros dos alunos. Com isso, intenciona-se, em um primeiro momento, conhecer como os alunos lidam com as tarefas, quais relações estabelecem, qual conhecimento eles mobilizam, independentemente da correção das respostas apresentadas, para, em um segundo momento, elaborarem-se intervenções necessárias no processo de matematizar dos estudantes.

Mais que observar, é desejável que o professor aproveite todas as situações emergentes ou propostas no contexto de sala de aula, fazendo delas um veículo por meio do qual intervém e oportuniza a aprendizagem aos seus estudantes. Para tanto, considera-se fundamental que esse professor perceba as diferentes compreensões dos estudantes acerca das situações vivenciadas e saiba aproveitá-las nos processos de ensino e de aprendizagem; esteja alerta às oportunidades de intervenção, para que, ao dialogar com estudantes, não indique um único caminho de lidar com as situações; esteja aberto ao surgimento do "novo" e do "não saber" em sua prática (MENDES; TREVISAN; BURIASCO, 2012).

Por meio da análise da produção escrita de alunos, os professores podem sair de uma cultura de demarcação e exclusão de pessoas para, conforme Ciani (2012, p. 42), "uma cultura da multiplicidade das maneiras de lidar com os conhecimentos, que está ligada à solidariedade e à cooperação". Com essa prática, os professores têm a oportunidade de conhecer o fazer matemática de seus alunos, a atividade de matematizar, respeitando peculiaridades; de ampliar as possibilidades de guiar o processo de aprendizagem e, de modo especial, de tomar os alunos como participantes ativos do processo educacional. Isso possibilita maiores condições para o estudante se envolver e se comprometer com a sua aprendizagem, além de viabilizar a construção de um conhecimento para além do desenvolvimento fragmentado, mecânico e reprodutivo de competências.

> Sob o olhar das maneiras de lidar, é possível interrogar-se sobre os processos nos quais os alunos se envolvem ao resolver um problema, independentemente das respostas que apresentam, bem como, realizar uma leitura na busca de evidências e pistas que eles dão sobre a relação que estabelecem com o enunciado e quais os contextos que constituem nos processos de resolução e mobilização de conceitos matemáticos. (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO; FERREIRA, 2010, p. 3).

Em uma perspectiva formativa, a avaliação, qualquer que seja a forma como se apresenta, tem sempre uma função de regulação, uma vez que sua finalidade é a de assegurar uma articulação entre, por um lado, as características das pessoas em formação, e por outro, as características do próprio sistema de formação.

A interação professor e aluno, indispensável no processo de regulação pedagógica, faz-se por meio da comunicação gerada entre os envolvidos e a qualidade dessa comunicação é o que assegura que professor e alunos se entendam mutuamente.

A avaliação pode tornar-se um processo de interação entre professor e aluno que, por meio da explicitação das suas divergências, pode construir entendimentos comuns. Assim, tanto professores quanto alunos podem se valer de informações dos processos de ensino e de aprendizagem que lhes sejam relevantes, refletir a respeito delas com o objetivo de compreender os modos de pensar e caminhos utilizados na resolução de um problema. Isso significa assumir a avaliação como prática de investigação.

> Entendendo a avaliação da aprendizagem escolar como prática que busca respostas sobre como se dão os processos envolvidos com ela, interroga-se o que é diretamente observável, percorrem-se caminhos, buscam-se compreender esses mesmos processos, seguem-se vestígios e, com isso, infere-se sobre o que não é diretamente observável, ou seja – investiga-se. (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009, p. 69).

Nos processos de ensino e de aprendizagem, os construtos dessa prática de investigação não devem permanecer apenas como informação, mas por meio da reflexão, retornar à prática de sala de aula, efetivando-se em intervenções de ensino para a regulação da aprendizagem, porque

> [...] é necessário passarmos de uma preocupação centrada no produto (que se pretendia medir, pesar...) para uma preocupação centrada no processo de produção, para conhecê-lo e melhorá-lo, e, finalmente, sobre os produtores (professores, alunos, escola, sistema) para ajudá-los. (BURIASCO, 1999, p. 218).

A análise da produção escrita permite uma leitura a partir de um "saber" do aluno que nem sempre é valorizado. Com isso o professor pode conjecturar a respeito de qual matemática ele está aprendendo, qual entendimento tem do que é trabalhado em sala de aula, quais dificuldades apresenta, o que pode ser feito para que as dificuldades sejam superadas.

A prática da análise da produção escrita do estudante seguida de uma intervenção pode ser tomada como estratégia para aproximar mais a prática do estudante em lidar com o contexto de uma situação, ou particularmente de um problema. A intervenção como um componente do processo de avaliação da aprendizagem tem sido estudada pelo GEPEMA como uma forma de operacionalizar, em sala de aula, a avaliação como oportunidade de aprendizagem, na mesma perspectiva de avaliação da RME.

A intervenção, feita a partir da análise da produção escrita e estreitamente associada à reflexão, busca levantar conjecturas que, de um lado, possam colocar em movimento uma reorganização progressiva do raciocínio matemático dos alunos durante seu processo de aprendizagem e, de outro, encontrar pontos de apoio para o professor dar continuidade ao trabalho em sala de aula. A intervenção exerce assim uma função provocadora de conflitos na interpretação dos estudantes, buscando torná-los aparentes, funcionando como oportunidades de aprendizagem para com isso poderem reorganizar seu raciocínio ao resolverem esses conflitos interpessoais.

A escola é um dos lugares onde as pessoas podem aprender que atitudes devem ser tomadas, não em função de recompensa ou punição, mas porque são moral e eticamente corretas. Essa é uma característica da autonomia. Uma das formas de a escola proporcionar contexto para isso nas aulas é envolver os alunos na troca de ideias a respeito de questões relevantes e na discussão de suas possíveis ou impossíveis soluções. Esse tipo de contexto, de certa forma, exige de professores e alunos uma reflexão crítica da prática educativa, para que a teoria não se torne apenas mais um discurso e a prática mero treino de reprodução alienada e sem questionamento.

Na perspectiva da RME, professores e alunos propõem situações cujos contextos permitem o desenvolvimento de um processo de aprendizagem no qual nem os professores nem os alunos ficam reduzidos à condição de objeto um do outro, uma vez que ensinar/aprender não é transferir/adquirir conhecimento, mas criar as possibilidades para cada um passar à condição de autor de seu próprio conhecimento.

A investigação nos trabalhos teóricos da RME revelou uma sintonia com as concepções de Educação Matemática do GEPEMA, nucleadas pela ideia da avaliação da aprendizagem. Exemplo disso é a aproximação entre a avaliação da aprendizagem proposta por Buriasco (1999) com a avaliação didática indicada por Van den Heuvel-Panhuizen (1996). As ações indicadas e desenvolvidas pelo grupo se justificam por essa vertente teórica e podem se fortalecer compondo harmoniosamente e gerando ações para a sala de aula.

Espera-se que os estudantes envolvidos "re-inventem" matemática a partir de, e na sua realidade, o que contempla a ideia de Freudenthal (1973) de "matemática como atividade humana".

> O que os humanos têm que aprender não é matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade – o processo de matematizar a realidade e, se possível, até mesmo o de matematizar a matemática. (FREUDENTHAL, 1968, p. 7, tradução nossa).

E o erro... ora!!!

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª série)**: Matemática. Brasília, 1998.

BURIASCO, R. L. C. de. **Avaliação em matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Campus de Marília, 1999.

BURIASCO, R. L. C. de. Análise da Produção Escrita: a busca do conhecimento escondido. In: ENDIPE – Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, 12., 2004, Curitiba. **Anais...** Curitiba: Champagnat, 2004. v. 3, p. 243-251.

BURIASCO, R. L. C. de.; SOARES, T. C. S. Avaliação de sistemas escolares: da classificação dos alunos à perspectiva de análise de sua produção matemática. In: VALENTE, W. R. (Org.). **Avaliação Matemática**: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2008. p. 101-142.

BURIASCO, R. L. C. de; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos). **BOLEMA**, v. 33, p. 69-96, 2009.

CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2012. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

D'AMBROSIO, B. et al. Beyond reading graphs: student reasoning with data. In: KLOOSTERMAN, P.; LESTER JR, F. (Ed.) **Results and interpretations of the 1990 through 2000 mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress.** Reston: NCTM, 2004. p. 363-382.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/6279.pdf>. Acesso em: 8 nov. 2008.

FREUDENTHAL, H. Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. **Educational Studies in Mathematics,** n. 1, p. 3-8, 1968.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: Reidel. 1973.

HADJI, C. **A avaliação regras do jogo:** das intenções aos instrumentos. 4. ed. Porto: Porto Editora, 1994.

KASTBERG, S. E. et al. Context Matters in Assessing Student´s Mathematical Power. **For the Learning of Mathematics,** v. 25, n. 2, p. 10-15, 2005.

MENDES, M. T.; TREVISAN, A. L.; BURIASCO, R. L. C. Possibilidades de intervenção num contexto de ensino e avaliação em matemática. **EM TEIA:** Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 3, p. 1-13, 2012.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and realistic mathematics education**. Utrecht: NL: Freudenthal Institute, 1996.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em Matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; BURIASCO, R. L. C. de; FERREIRA, P. E. A. Interpretações de Alunos da Educação Básica para a Ideia de Recorrência em uma Questão Aberta de Matemática. **Educação Matemática em Pesquisa**, v. 12, n. 1, p. 143-163, 2010.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DE ERROS NO CÁLCULO DE PERÍMETRO E ÁREA DE FIGURAS PLANAS NO ENSINO MÉDIO

Josiele Maria Fusiger

1. INTRODUÇÃO

A Geometria Plana é uma das áreas da Matemática em que os alunos apresentam mais dificuldades, relacionadas a vários conceitos, como perímetro e área de figuras planas. Parte das dificuldades pode ter origem na falta de estímulo para o desenvolvimento de habilidades espaço-visuais e na não utilização de materiais concretos, de modo que pode comprometer a aprendizagem dos estudantes.

No entanto, a maior dificuldade de aprendizagem talvez decorra de alguns problemas já conhecidos, como, por exemplo, a utilização de métodos tradicionais de ensino que não levam em consideração os avanços de aprendizagem e as formas de estimular os alunos na construção do seu próprio conhecimento. Por isso, consideramos necessário modificar o processo de ensino e aprendizagem, de forma que agregue metodologias variadas, como o uso de recursos tecnológicos.

Uma abordagem que tem sido considerada eficaz para detectar dificuldades é a análise de erros, que estuda cada caso particular para identificar suas origens. A análise de erros permite que haja intervenção sobre os problemas identificados, de modo a contribuir com o professor para a escolha da estratégia correta de ensino, permitindo ao aluno superar algumas dificuldades de aprendizagem.

O erro na aprendizagem tem sido considerado em muitas publicações e estudado por diversos autores. Davis e Espósito (1990), fundamentadas no construtivismo piagetiano, apontam três alternativas para analisar os erros dos alunos:

1º) se o aluno já tem condições de solucionar o problema proposto, mas erra porque selecionou estratégias inadequadas ou porque não tem as informações necessárias, então a conscientização sobre seu erro pode levá-lo a refazer os procedimentos ou obter as informações;

2º) se a estrutura do pensamento do aluno ainda não é suficiente para solucionar a questão e, consequentemente, para selecionar estratégias de resolução, a conscientização sobre o próprio erro pode ajudá-lo, com apoio do professor, a atingir um nível de desenvolvimento superior;

3º) se o aluno sequer entende a tarefa que lhe é proposta, não há como selecionar estratégias de solução. No caso, seus erros são sistemáticos, isto é, se repetirão em situações semelhantes, pois ele não se sente desafiado pela tarefa.

Já Torre (2007) resgata o papel do erro em várias áreas e, ao enfocar a aprendizagem, considera que o erro "é uma variável concomitante ao processo educativo, porque não é possível avançar em um longo e desconhecido caminho sem se equivocar. Dito mais peremptoriamente: **não há aprendizagem isenta de erros**" (p. 27, grifo do original).

Um filósofo que deu muitas contribuições ao estudo do erro é Bachelard, ainda que não tenha se debruçado sobre erros em Matemática, pois, segundo ele, "a história da matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro. Logo, nenhuma das teses que sustentamos neste livro se refere ao conhecimento matemático" (BACHELARD, 2005, p. 28).

Bachelard trata do erro em várias instâncias, como quando comenta a atitude do aluno frente ao erro: "Basta uma divisão em que ´sobra resto`, contas que ´não dão certo`, para que o aluno se assuste. Ele repete mil vezes a divisão para conseguir um resultado exato" (BACHELARD, 2005, p. 262).

Estudiosos das ideias de Bachelard trazem algumas observações sobre sua obra e sobre o papel do erro em sua filosofia. Valério (2005, p. 4) considera que é na reconstrução de conhecimentos que o erro tem papel fundamental na epistemologia de Bachelard:

> [...] o epistemólogo repudia a tese da verdade evidente e aponta o erro como uma forma de constituição e de avanço do saber científico. No entanto, há que se distinguir entre os erros cometidos por distração e aqueles solidários de uma estrutura, chamados por Bachelard de erros positivos, e cuja correção proporcionará a substituição da estrutura de pensamento. O erro assume uma função positiva na gênese do saber e as verdades se tornam provisórias, passíveis de modificação.

Delizoicov (2005) interpreta as ideias de Bachelard, considerando que "[...] é para problematizar o conhecimento já construído pelo aluno que ele deve ser apreendido pelo professor" (p. 5). Assim, quando o professor analisa os erros do aluno, ele está, de certa forma, entendendo como ele construiu aquele conhecimento equivocado e pode, então, empregar estratégias pedagógicas para desestabilizá-lo.

Partindo desses pressupostos, trazemos, neste texto, um recorte de uma pesquisa de mestrado, que teve como **objetivo** analisar os erros cometidos por alunos de um terceiro ano do Ensino Médio, no cálculo de perímetros e áreas de figuras planas, para elaborar estratégia metodológica para superar dificuldades.

2. CONSIDERAÇÕES SOBRE O ERRO NA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Em muitos casos, os erros dos alunos são vistos, na educação em geral e principalmente em Matemática, como algo rotulado, pelo qual o estudante deve ser simplesmente punido, sem a preocupação da compreensão de como ocorreu. Dessa forma, o erro acaba sendo relegado sem ser explorado e, consequentemente, leva o aluno a cometê-lo em séries posteriores, sem se dar conta da sua verdadeira origem.

Alguns professores não gostam de usar a palavra erro ou consideram que ela pode causar algum problema na relação aluno-professor. No entanto, o estudo dos erros deveria fluir naturalmente no sistema educacional, uma vez que o professor só conhece de fato as dificuldades dos seus alunos quando se preocupa com os erros que eles cometeram, pois acertar os exercícios não significa ter o conhecimento do conteúdo, e em muitos casos os discentes conseguem burlar o resultado, através de procedimentos equivocados, como "cola", memorização ou, simplesmente, por sorte.

Sendo assim, Kaiber e Andrade (2005) reforçam:

> [...] a postura docente adotada perante os erros é consequência da concepção que possuem sobre o desenvolvimento do processo de ensino, sobre a aprendizagem do aluno e principalmente sobre a própria Matemática, na qual percebem-na como algo útil em suas vidas, alicerçando seu trabalho na repetição e no domínio de técnicas. (p. 7).

O professor, ao analisar os erros cometidos pelos alunos ou proporcionar atividades nas quais os próprios alunos os analisam, estará possibilitando a construção do conhecimento. Para o aluno, analisar e corrigir seu próprio erro, compreendendo-o, facilita a compreensão e o domínio do conteúdo e consequentemente sua aprendizagem. Cury (2007) leva-nos a perceber que a análise de erros é uma opção para o professor, sendo que se trata de uma sistemática que poderá auxiliá-lo, uma vez que, sendo possível detectar as dificuldades do aluno, é mais simples explorá-las no transcorrer da aula. O que não se pode esquecer é que os alunos têm suas dificuldades e, em geral, não gostam de expô-las, em razão de diversos motivos, como vergonha, falta de conhecimentos para formular a pergunta, receio do professor, etc.

É importante perceber que, por meio da análise de erros, o docente tem a oportunidade de encontrar as dificuldades do aluno e de trabalhá-las de forma diferenciada. Cury (2007) afirma que os professores de Matemática, em qualquer nível de ensino, costumam analisar os erros que os alunos cometem nas questões de provas avaliativas, porém, a forma de se fazer essa avaliação é que varia de professor para professor.

Assim, a autora ainda comenta que alguns professores

> [...] estão preocupados, unicamente, em detectar os erros, sem discuti-los com os alunos; outros aproveitam os erros encontrados e retomam o conteúdo em questão, permitindo que os alunos identifiquem suas dificuldades e tentem superá-las; outros, ainda, exploram os erros com os alunos, questionando os limites de validade da resposta dada, ou, mesmo, tentando entender como os alunos raciocinam ao resolver a questão. Em qualquer uma das formas de considerar os erros dos alunos, os professores estão agindo, em geral, conforme suas concepções e crenças sobre a natureza da Matemática, sobre a melhor forma de ensiná-la e sobre o que significa aprender Matemática. (CURY, 1995, p. 40).

Para a autora, ao falar em avaliação, a maioria dos professores afirma que, nas provas escritas para verificação da aprendizagem, eles buscam eliminar os erros encontrados, alertando os alunos quanto à ocorrência, para não haver futura repetição. Dentro dessa lógica de pensamento, os erros são analisados e considerados por Cury (1995) sob dois aspectos: eliminação ou exploração de suas potencialidades. Em qualquer um dos casos, será enfatizado o conteúdo técnico-matemático do erro, a natureza da Matemática ou o processo de aprendizagem dessa disciplina. Para ela, se o foco de interesse for unicamente o conteúdo do erro e o que se deseja é eliminá-lo, a solução é procurar diagnosticar suas causas, pois representa uma falha no processo; já, se o desejo é explorá-lo, então passa a ser considerado um estágio que se faz necessário no processo de aprendizagem, que pode gerar novas descobertas matemáticas.

Viola dos Santos (2007) considera que cada aluno tem um jeito próprio de resolver um problema e não cabe aos professores ou pesquisadores classificarem, de imediato, apenas como certo ou errado. O professor deve tomar como ponto de partida o que os alunos sabem e a partir disso planejar ações que promovam a construção do conhecimento; além disso, deve compreender as diferentes interpretações que os alunos fazem do exercício, sendo capaz de oferecer elementos norteadores para a recondução de todo o processo de ensino e aprendizagem, tanto na abordagem dos procedimentos e conceitos associados ao estudo, quanto nos seus aspectos metodológicos.

De acordo com Cury (2004), uma situação comum de ocorrer é a reclamação por parte dos alunos alegando, por exemplo, que erraram apenas um sinal, como se não fosse importante no resultado. Porém, para a autora, o docente tem a obrigação de verificar o porquê de aquele erro ter ocorrido, podendo ser um indicador de falhas de aprendizagem anteriores. Para ela:

> um erro que parece pequeno e sem importância aos olhos dos alunos, como é o erro de sinal, pode trazer inúmeras dificuldades embutidas, em operações elementares ou na aplicação de fórmulas específicas. Entender qual é o problema, discuti-lo com os alunos, partir das respostas para construir novas perguntas, tudo isso pode esclarecer problemas não resolvidos que se arrastam, às vezes, desde as séries iniciais. (CURY, 2004, p. 111).

O professor, quando refaz os exercícios errados em sala de aula, acaba aprendendo o porquê de o aluno ter errado a tarefa, podendo orientá-lo de acordo com suas necessidades futuras. Contraditoriamente, segundo Rocha (2001), para que os alunos acertem mais, é preciso que tenham oportunidade de errar, sem serem criticados. Quando o professor desconsidera o erro, ele deixa muitas vezes de levar em conta um potencial didático de grande valor, que poderia ser trabalhado por meio de questionamentos, inquietações, experimentações e trazer novas concepções no processo de ensino e aprendizagem.

Pinto (2000, p. 151) também considera que:

> Se o professor compreende por que o aluno erra, poderá planejar um ensino eficaz. Não se trata apenas de sancionar o erro, mas sobre tudo de adotar outros tipos de intervenções, capazes de atingir todo o grupo-classe, tendo em vista o progresso do aluno e, consequentemente, a superação dos erros. Portanto, diagnosticar e corrigir os erros não é suficiente para melhorar o ensino. Os erros contêm um potencial educativo que precisa ser mais bem explorado, não só pelos professores como também pelos próprios alunos.

Ao iniciar o ano letivo, é possível perceber que o aluno traz para a escola uma enorme bagagem de informações e situações vividas cotidianamente. Logo em seguida, diante da resolução de um determinado problema matemático, geralmente o professor espera que o aluno obtenha um único resultado como resposta. Caso não ocorra o resultado esperado, todo o trabalho é desconsiderado e todo o processo de construção do conhecimento que o aluno teve é ignorado e lhe é atribuído um zero como valor da avaliação da questão. Assim, para Rocha (2001), não se pode esquecer de que, para o aluno chegar a esse resultado "errado", foi necessário raciocinar e ter um entendimento a respeito do que lhe foi passado e também do que foi representado no processo que o conduziu à resposta errada.

Cury (2007) ainda afirma que as pesquisas sobre erros na aprendizagem de Matemática devem fazer parte do processo de formação dos futuros professores. Quando investigam os erros, observam como os alunos resolvem determinado problema e discutem as soluções com os estudantes, esses futuros professores de Matemática estão refletindo sobre o processo de aprendizagem nessa disciplina e sobre as possíveis metodologias de ensino que vão implementar em seus futuros trabalhos, podendo ajudar seus alunos ao detectarem as dificuldades.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO

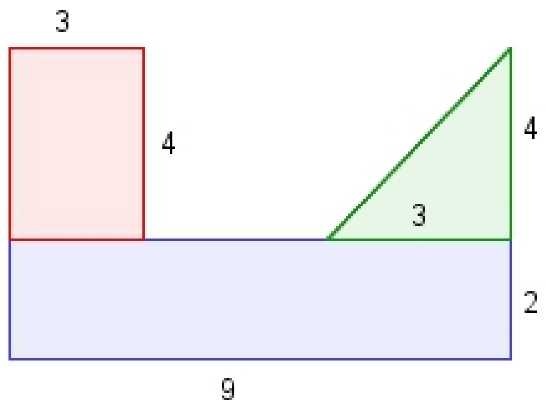
A pesquisa foi realizada com 22 alunos de uma turma de terceiro ano de Ensino Médio, aos quais foi aplicado um teste, composto de cinco questões sobre perímetro e área, adaptadas de vestibulares de Matemática e de sites sobre ensino dessa disciplina, utilizando-se questões rotineiras[26].

Para facilitar a visualização da análise posterior, são apresentadas, inicialmente, as cinco questões:

Questão 1:
Em uma propriedade rural, um agricultor decidiu construir mais cercados para as suas ovelhas, aproveitando cada espaço encontrado. As medidas dos lados dos cercados estão indicadas na figura, em metros.

a) quantos metros de cerca são necessários para delimitar todos os cercados?

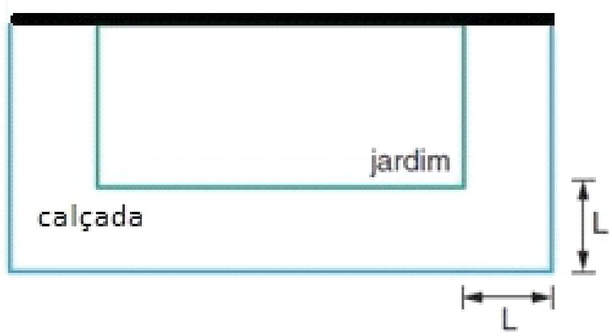
b) qual a área total disponível para os animais?



[26] Buriasco (1999) chama de questões rotineiras aquelas que são frequentes em sala de aula ou em livros-texto.

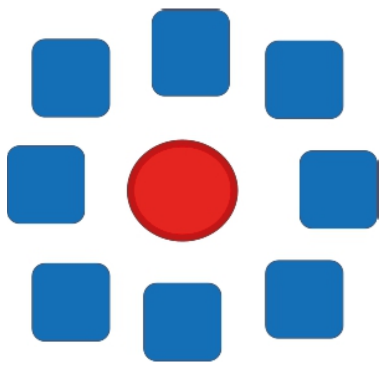
Questão 2:

(UFF-RJ-2000) Num terreno retangular com 104 m^2 de área, deseja-se construir um jardim, também retangular, medindo 9 m por 4 m, contornado por uma calçada de largura L, como indica a figura. Calcule o valor de L.



Questão 3:

Para ornamentar a entrada de uma propriedade, um jardineiro construiu um jardim com o formato abaixo. Nos quadrados foram plantadas folhagens e no círculo, flores vermelhas.



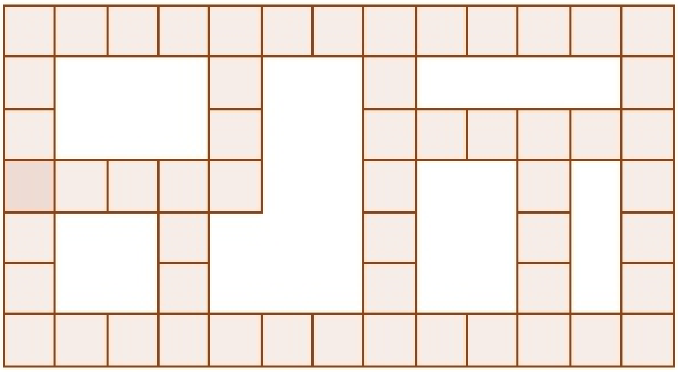
a) Sabendo que o lado de cada quadrado é de 2 metros e o diâmetro da circunferência é de 2 metros, qual a área total plantada?

b) Se for necessário passar um arame em torno de cada canteiro, para evitar que as plantas sejam pisoteadas, quantos metros de arame têm que ser comprados?

Questão 4:

A figura a seguir representa um conjunto de seis tanques de peixes ornamentais, em que os quadrados coloridos representam os azulejos que contornam as bordas dos tanques. O lado de cada quadrado mede 1 metro. Qual a área disponível para os peixes?

(Mostre os seus cálculos).



( ) 35 m^2

( ) 32 m^2

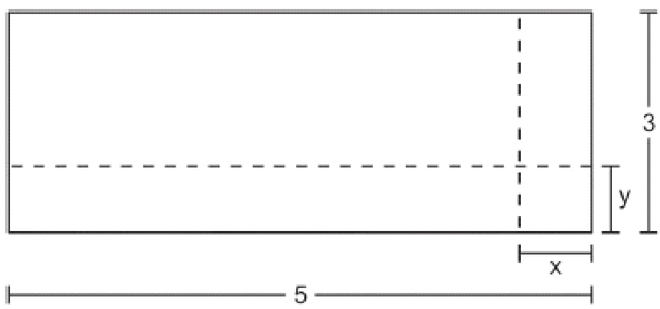
( ) 29 m^2

( ) 31 m^2

( ) 28 m^2

Questão 5:

(Enem -2012- prova amarela) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro, após ser lavado, é $(5 - x)(3 - y)$. Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:



( ) $2xy$

( ) $15 - 3x$

( ) $15 - 5y$

( ) $5y - 3x$

( ) $5y + 3x - xy$

Assinale a alternativa correta e mostre seus cálculos:

As respostas, após a correção, foram separadas em corretas, incorretas e em branco. Para analisar os erros cometidos no seu desenvolvimento, foram adaptadas as etapas que fazem parte da técnica de análise de conteúdo (BARDIN, 1979). A primeira fase, de pré-análise, consistiu na preparação do material, feita da seguinte maneira:

- primeiramente, foi feita uma cópia xerográfica das respostas dos testes;
- posteriormente, foi nomeada cada cópia, ou seja, a prova do primeiro aluno foi indicada por A1, a do segundo por A2, e assim até o A22, para preservar suas identidades; esse nome atribuído a cada aluno foi indicado à frente de cada questão por ele desenvolvida;
- em seguida, foram recortadas e coladas em uma tira de papel as respostas à primeira questão, para assim poder visualizar as de todos os alunos, tendo sido feito o mesmo procedimento para as demais. Foi realizada uma leitura inicial desse conjunto de respostas, que forma o que Bardin (1979) chama de *corpus* da pesquisa;
- na sequência, as questões erradas foram separadas e as ocorrências de erros foram identificadas, tendo sido atribuído um código para classificação de cada tipo de erro encontrado;
- após, na fase de exploração do material, foi feita a unitarização e categorização, ou seja, a criação de categorias que englobam erros semelhantes. Em uma segunda leitura das respostas erradas, as categorias foram refinadas, sendo agrupados erros semelhantes;
- na fase de tratamento dos resultados, as categorias foram apresentadas em quadros, com número de ocorrências, e também foram descritas por meio de um texto-síntese.

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Inicialmente, apresentamos, no quadro 1, a distribuição das respostas em corretas, incorretas e em branco, em que Qi, $1 \leq i \leq 5$, indica a questão e **a** ou **b**, a alternativa, se for o caso.

Quadro 1 – Distribuição inicial das respostas.

Tipos de Respostas	Questões													
	Q1a		Q1b		Q2		Q3a		Q3b		Q4		Q5	
	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%
Corretas	5	23	7	32	0	0	1	5	7	32	17	77	5	23
Incorretas	15	68	12	55	18	82	20	91	13	59	4	18	16	73
Em Branco	2	9	3	14	4	18	1	5	2	9	1	5	1	5
Total	**22**	**100**	**22**	**100**	**22**	**100**	**22**	**100**	**22**	**100**	**22**	**100**	**22**	**100**

Fonte: dados da pesquisa.

Notamos, primeiramente, que apenas na questão 4 a percentagem de corretas é maior do que a de incorretas e, na questão 2, não houve respostas corretas. Esse fato é preocupante, haja vista que esses alunos, supostamente, já deveriam ter trabalhado com esses conteúdos desde o Ensino Fundamental e estariam, no Ensino Médio, apenas revisando-os.

Para categorizar as respostas, as corretas receberam o código "R" e as respostas em branco, o código "W". Em seguida, foram determinadas as categorias de erros, listadas a seguir, com um exemplo característico em cada caso:

Erro A: o aluno utilizou apenas os valores indicados na figura para a realização do cálculo.

Exemplo: Na questão 1, o aluno A2 escreveu apenas "*3+4+3+4+2+9=25* metros" para o item a, indicando que não levou em conta os valores que não eram apresentados na figura, mas que deveriam ser deduzidos do desenho e dos outros valores.

Erro B: o aluno errou o uso de fórmulas.

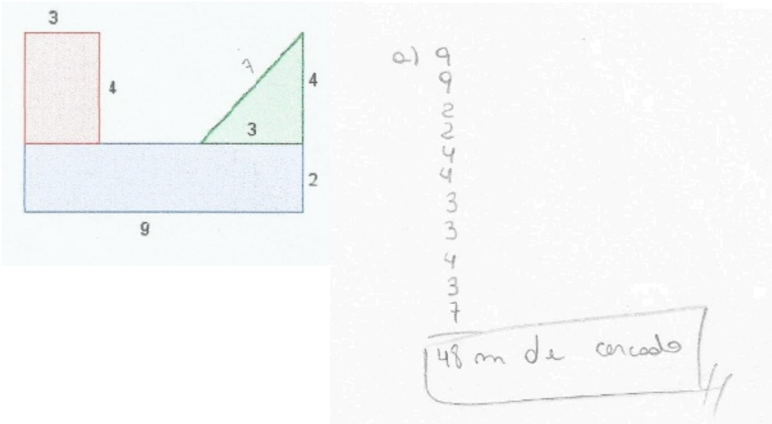
Exemplo: Na questão 1, o aluno A5 deduziu os valores para todos os segmentos da figura, exceto o da hipotenusa do triângulo, que indicou apenas por "*x*", mostrando que não sabe usar a fórmula do teorema de Pitágoras.

Erro C: o aluno não apresentou cálculos, apenas indicou um valor errado.

Exemplo: Na questão 1, o aluno A22 respondeu apenas "34 metros" para o item a, sem indicar qualquer cálculo.

Erro D: o aluno considerou duas vezes a mesma medida para calcular o perímetro. Como **exemplo**, temos a resposta incorreta indicada na figura 1:

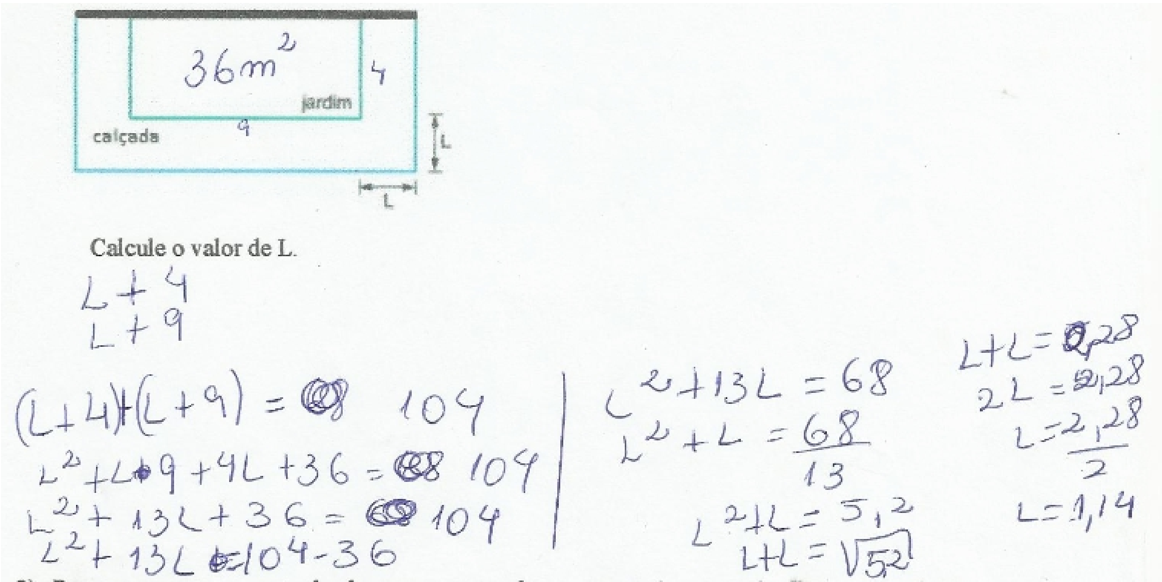
Figura 1 – Resposta do aluno A6 à questão 1.



Fonte: dados da pesquisa.

Erro E: o aluno errou a representação algébrica ou desenvolvimento do cálculo. Como **exemplo**, indicamos a resposta da figura 2:

Figura 2 – Resposta do aluno A1 à questão 2.

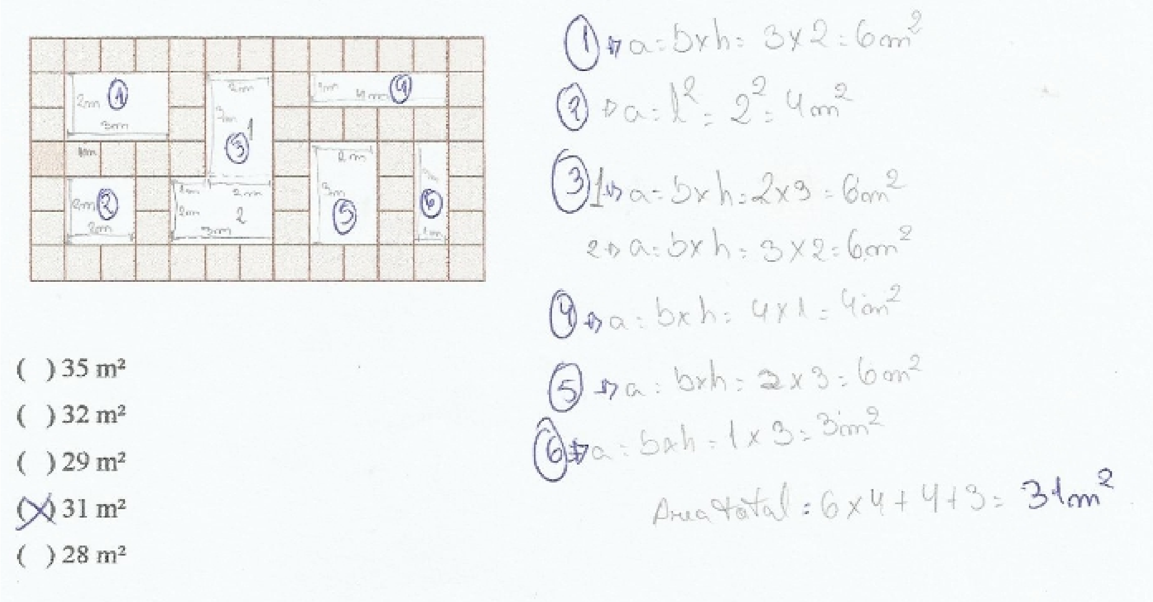


Fonte: dados da pesquisa.

Notamos que, ao desenvolver o cálculo, o aluno se esqueceu de adicionar um L ao cálculo da largura, que deveria ser *9+2L.*

Erro F: o aluno errou operações básicas ou se esqueceu de realizá-las. Como **exemplo**, indicamos a resposta da figura 3, na qual o aluno parece ter se esquecido de contar uma das respostas por ele obtidas:

Figura 3 – Resposta do aluno A10 à questão 4.



Fonte: dados da pesquisa.

Erro G: o aluno errou o desenvolvimento do cálculo, mas marcou a alternativa correta.

Para sintetizar, indicamos, no quadro 2, a distribuição das categorias de erro:

Quadro 2 – Distribuição das categorias de erros dos alunos.

Categoria	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Total	
						N.	%
A	1	-	-	-	-	1	0,6
B	15	-	8	-	-	23	14,9
C	8	3	14	2	1	28	18,2
E	3	-	-	-	-	3	1,9
G	-	15	11	1	8	35	22,7
J	-	-	-	1	1	2	1,3
K	-	-	-	-	6	6	3,9
R	12	-	8	17	5	42	27,3
W	5	4	3	1	1	14	9,1

Fonte: dados da pesquisa.

Primeiramente, vemos que as categorias não se distribuem por todas as questões, com exceção dos erros do tipo C, G e das respostas corretas (R). No erro do tipo C, supomos que os alunos apenas "chutaram" um valor, pois não mostram como foi obtido; no erro do tipo G, ao contrário, os alunos parecem ter obtido a resposta por meio de algum artifício, já que o desenvolvimento errado não combina com a resposta certa.

Pelos tipos de erros cometidos, notamos que muitos alunos têm dificuldade com conteúdos do Ensino Fundamental, especialmente de Álgebra, não conseguindo usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para multiplicar corretamente dois binômios, não resolvendo uma equação de 2° grau ou um cálculo elementar.

Como foi possível notar na primeira questão, o aluno teria de encontrar o valor da hipotenusa para então calcular a quantidade de cerca que seria necessária para construir o cercado, porém poucos estudantes calcularam este valor, talvez por falta de informações necessárias ou até mesmo por não lembrarem como se calcula a hipotenusa. Nas demais questões, os alunos erraram o uso de fórmulas para calcular perímetro e área, por mais que esses tópicos, como citado anteriormente, sejam já estudados no Ensino Fundamental. De maneira geral, parece que esses alunos não estão seguros ao trabalhar com alguns conceitos de Geometria.

Também pode ser destacada a dificuldade de visualizar elementos que não são dados na figura como, por exemplo, na questão 1, pelo fato de que muitos estudantes não levaram em conta as medidas dos segmentos da base superior do retângulo azul, por não estarem indicados ou, na questão 2, não acrescentaram a medida L ao comprimento da base.

Como os alunos estão cursando o Ensino Médio, portanto tendo já estudado esses conteúdos no Ensino Fundamental, seria de esperar que entendessem os conceitos, bem como a manipulação algébrica que permitia, nas questões 2 e 5, resolver o que era solicitado. Esse resultado vem ao encontro do que foi analisado por Brum (2013), que propôs a alunos de 8° ano questões que envolviam perímetro e área para avaliar os desenvolvimentos dos cálculos algébricos e também notou que a maior parte dos participantes tinha dificuldades com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Além disso, os resultados obtidos são preocupantes porque não vão ao encontro do que sugerem as Orientações Curriculares para o Ensino Médio

(BRASIL, 2006, p. 69): “ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano”.

Assim, preparar materiais que apresentem questões contextualizadas, que exijam interpretação além da aplicação de fórmulas, que estejam disponíveis na rede para serem consultados pelos estudantes quando estudarem os conteúdos apresentados em sala de aula, pode ser uma possibilidade para a conclusão de um curso de mestrado profissional, visto que o produto gerado fica disponível na Internet, podendo ser acessado por professores, pesquisadores, pais e alunos. Tendo em vista essas considerações, como produto resultante da pesquisa realizada, foi construído um objeto de aprendizagem, descrito no próximo item.

5. O OBJETO DE APRENDIZAGEM CONSTRUÍDO

O termo “objeto de aprendizagem” tem sido definido de várias maneiras. O Institute of Eletrical and Eletronics Engineer (IEEE) apresentou uma das mais citadas: objeto de aprendizagem (OA) “é qualquer entidade, digital ou não digital, que pode ser usada para aprendizagem, educação ou treinamento” (2000). No entanto, essa também é uma das mais criticadas, pelo fato de que pode englobar qualquer recurso pedagógico.

Polsani (2003) considera que, para ter uma definição comumente aceita e que seja funcional, é preciso estabelecer um conceito que seja baseado nos princípios sob os quais os objetos de aprendizagem (OA) são criados. Sua proposta é definir um OA como “uma unidade independente e autônoma de conteúdos de aprendizagem que está predisposta a ser reutilizada em múltiplos contextos de ensino” (p. 2).

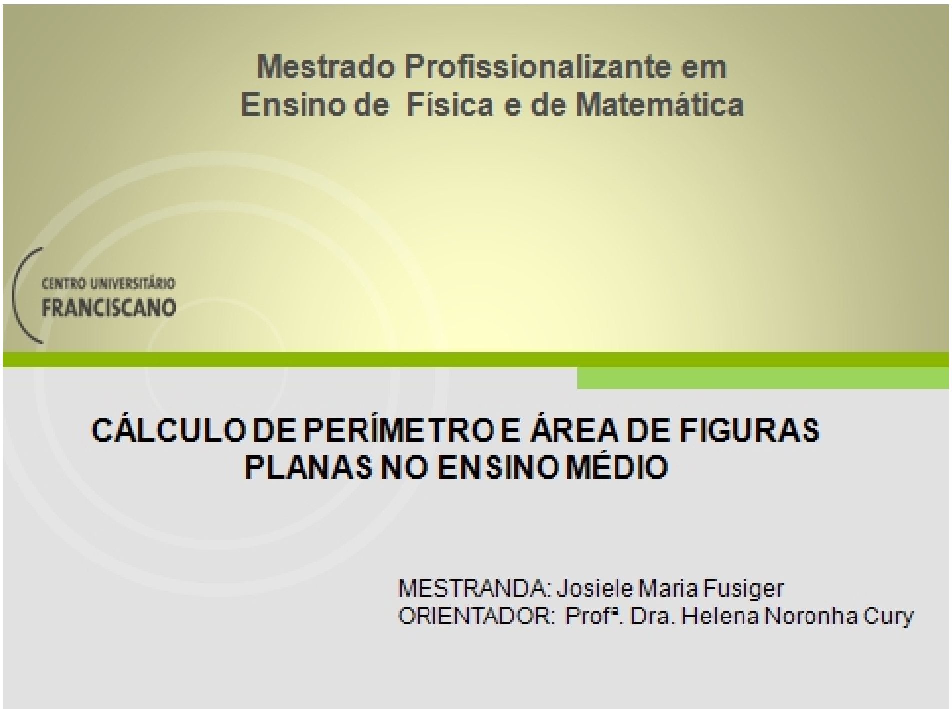
Handa e Silva (2003) apresentam características que são comuns a todos os OA, como a possibilidade de:

a) ser reutilizado (uso em diversos cursos);
b) ser portável (ser transportado para diversas plataformas);
c) ser modular (ser parte de um curso completo, podendo conter ou estar contido em outros OA);
d) ter metadados (ter descrição completa do seu conteúdo e utilização).

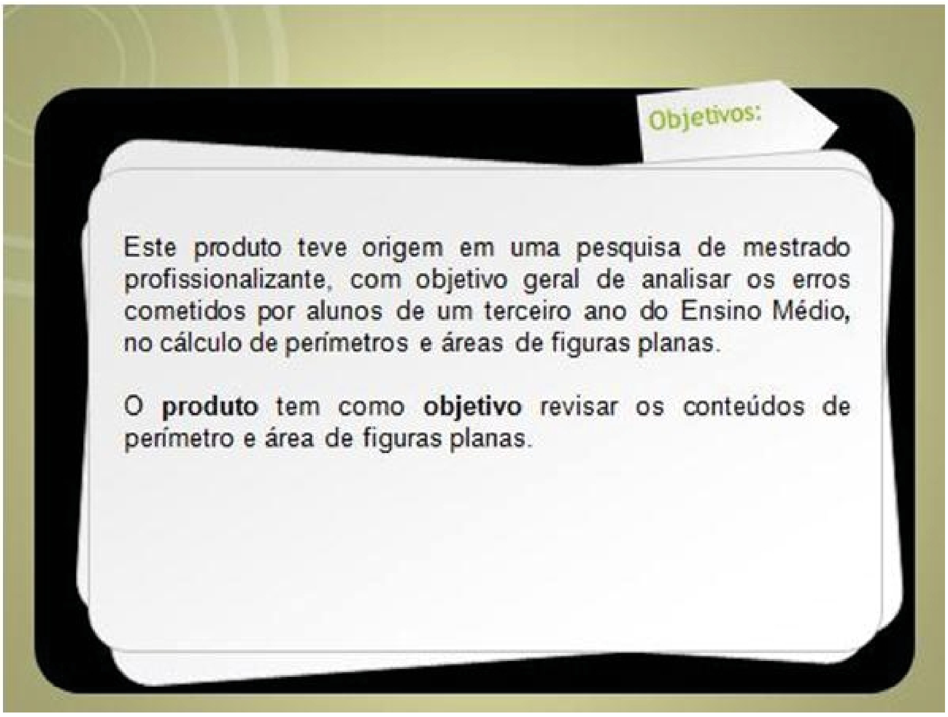
A partir das questões aplicadas no teste e de outras que são contextualizadas, elaboramos um objeto de aprendizagem que ficará disponível no site do

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano. O objeto, pela sua construção, permite que seja reutilizado com outras questões, elaboradas com outros contextos e fazendo parte de recursos disponibilizados aos alunos. Em cada questão proposta, é apresentada mais de uma alternativa para resposta, sendo apenas uma delas a correta. O aluno, então, poderá interagir com este produto, obtendo imediatamente o *feedback* para suas respostas.

A seguir, são apresentadas as telas e descritos os conteúdos e utilização.

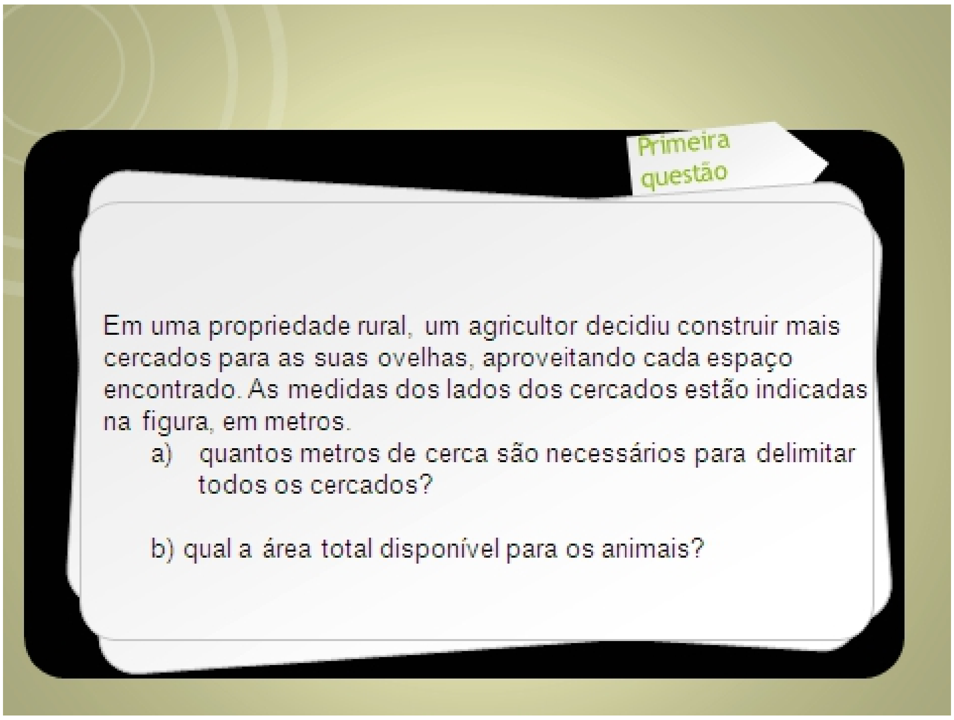


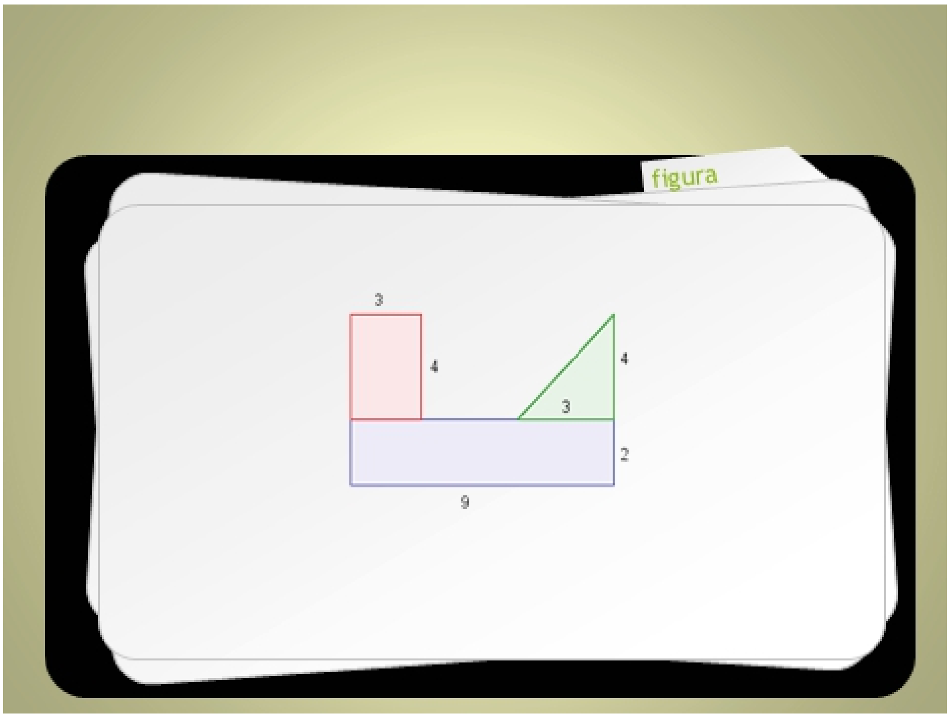
A tela acima apresenta a identificação da pesquisa que originou o produto. Na seguinte, são apresentados o objetivo geral da pesquisa e o do produto.



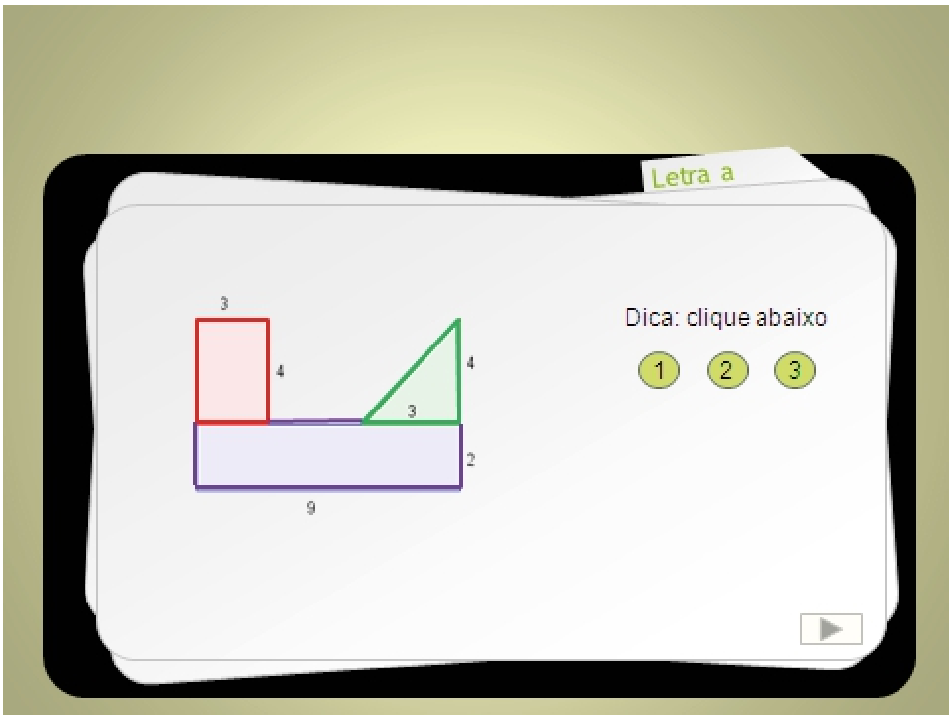
Na tela seguinte, o aluno tem a possibilidade de escolher a questão que deseja resolver. A tela, bem como muitas outras do produto, tem um agente pedagógico que é o componente responsável pelas apresentações das ações pedagógicas. Conforme Bercht (2001, p. 41), o agente "pode adotar a figura de um personagem amigo ou um personagem de um ´criador de problemas`, neste caso instigando e/ou dando dicas das tarefas a serem realizadas".

Nas duas telas a seguir, são apresentadas a primeira questão e a figura correspondente.

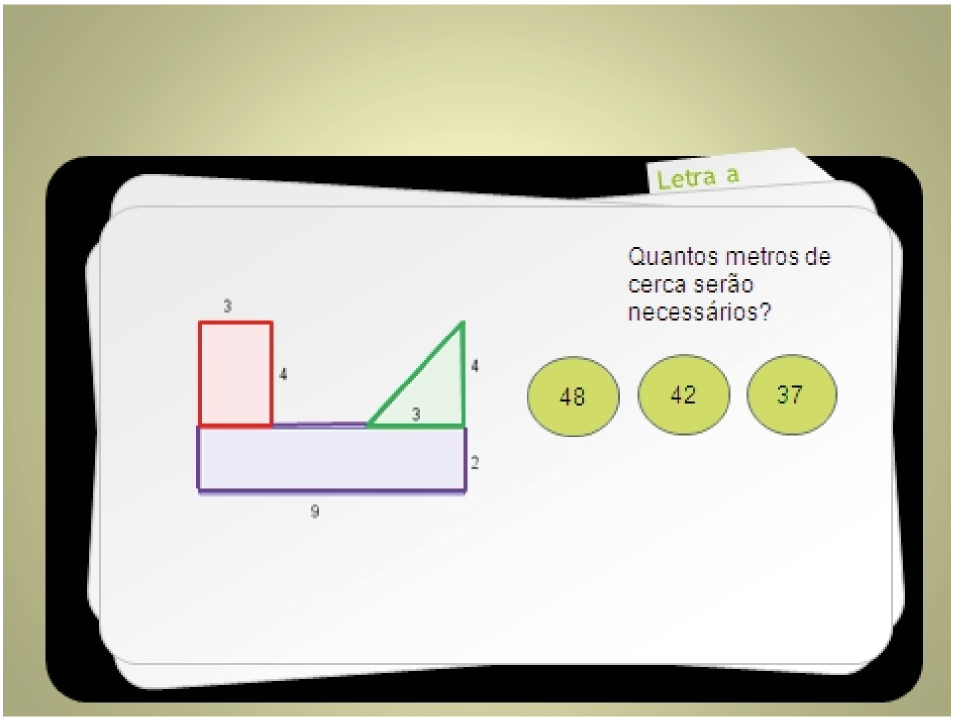


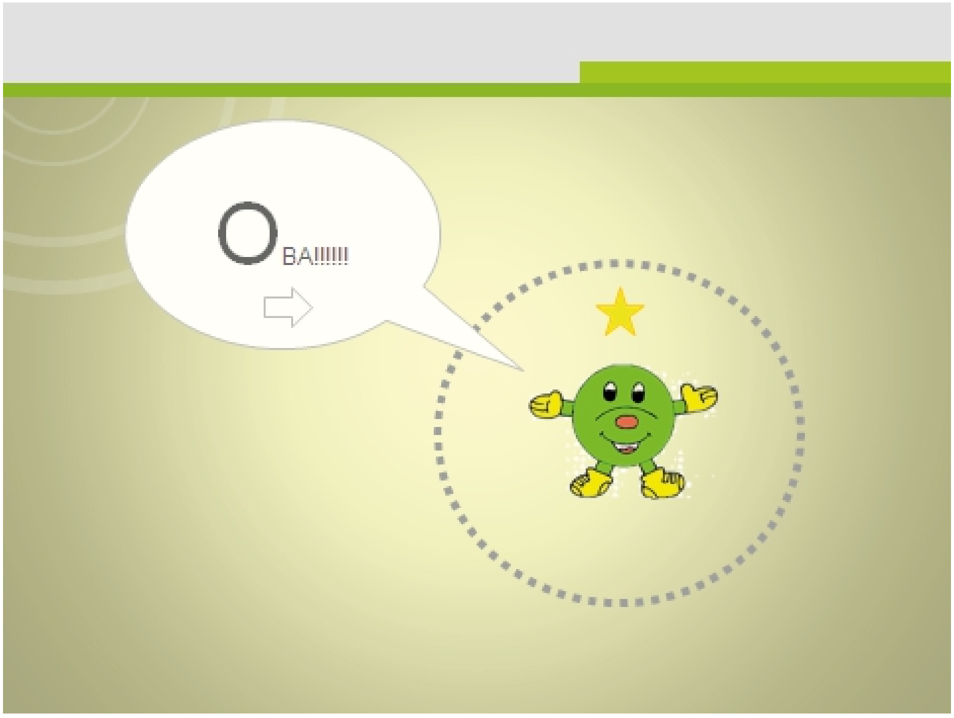


Para chamar a atenção do aluno, na próxima tela, ele recebe a "dica" de clicar sucessivamente nos números indicados e com isso o contorno de cada parte da figura é acentuado, para deixar claro que, no item *a*, o aluno não deve computar a medida de um segmento duas vezes, se ele faz parte de duas componentes da figura.

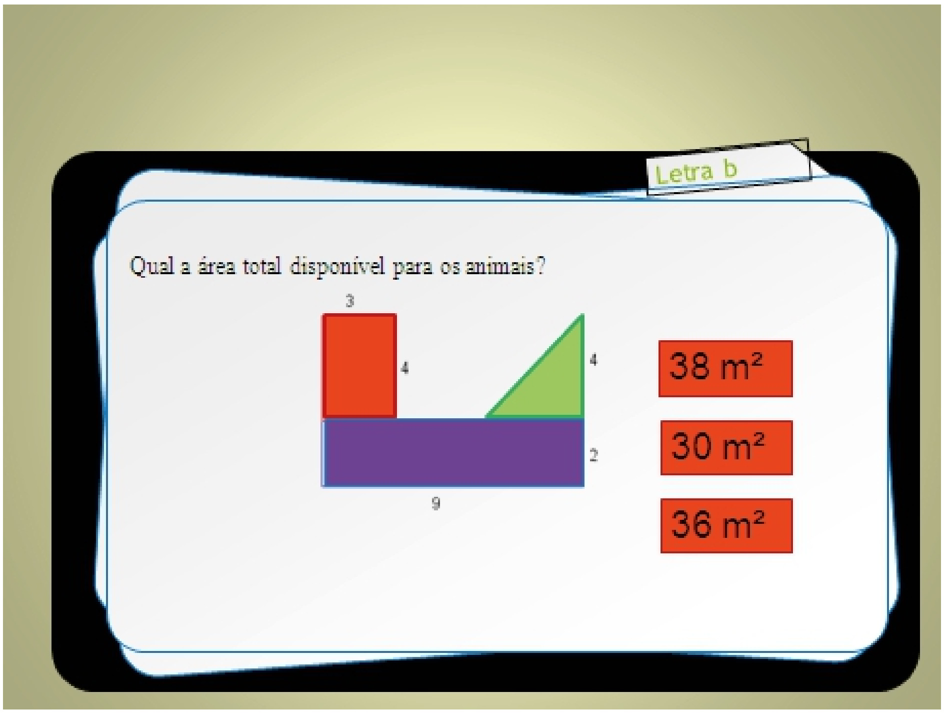


A próxima tela indica as opções de resposta do item *a*. O aluno, após realizar os cálculos, clica em uma delas e é direcionado para uma das duas telas seguintes, em que um agente pedagógico fornece o *feedback* sobre a resposta dada: correta ou incorreta. Como há um botão abaixo da palavra, se o aluno acertou, ele é direcionado para a questão seguinte; se errou, pode voltar às opções de resposta.

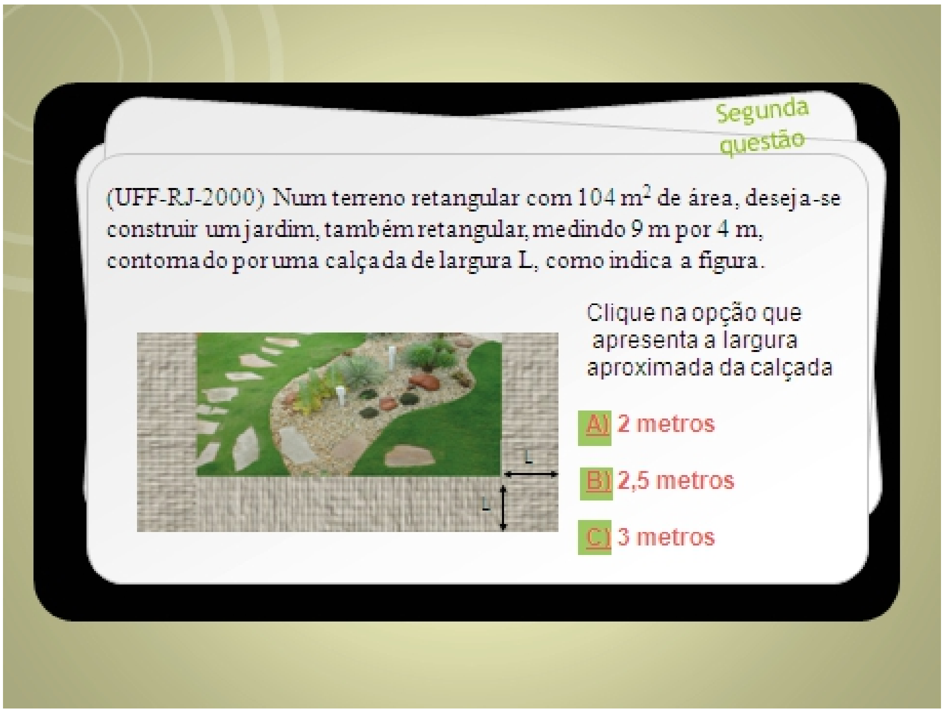

Letra a
Quantos metros de cerca serão necessários?
3
4
4
3
2
9
48
42
37


OBA!!!!!!

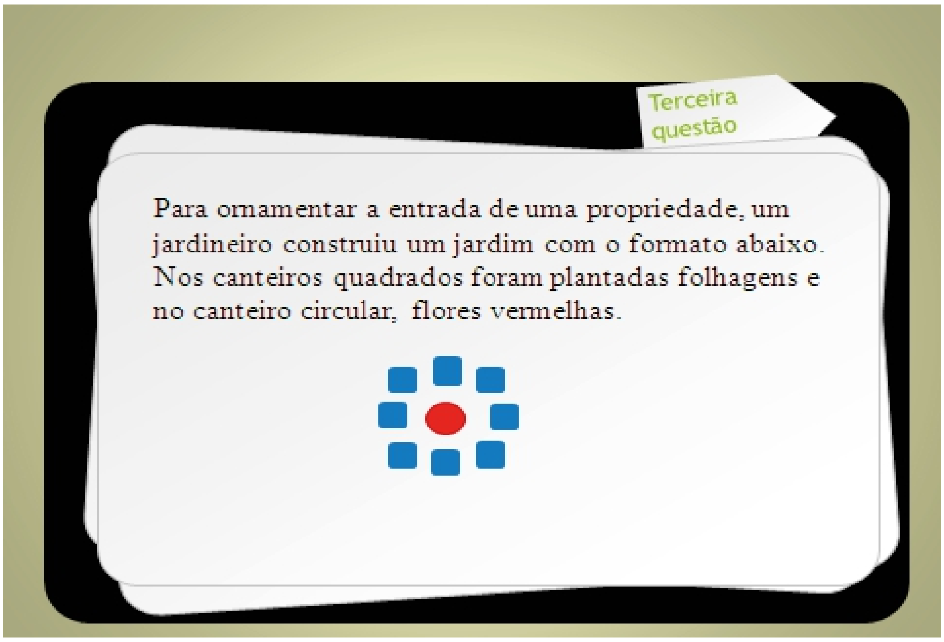
Como a primeira questão tem dois itens, na tela a seguir, o aluno vê as opções de resposta para o item *b*. Da mesma forma, após clicar em alguma delas, ele é dirigido para a respectiva tela de *feedback*, que não é repetida aqui. Ressalta-se o fato de que, ao surgir esta tela, são preenchidas em cores diferentes as regiões que indicam as áreas cuja soma vai ser um valor indicado em uma das opções de resposta.



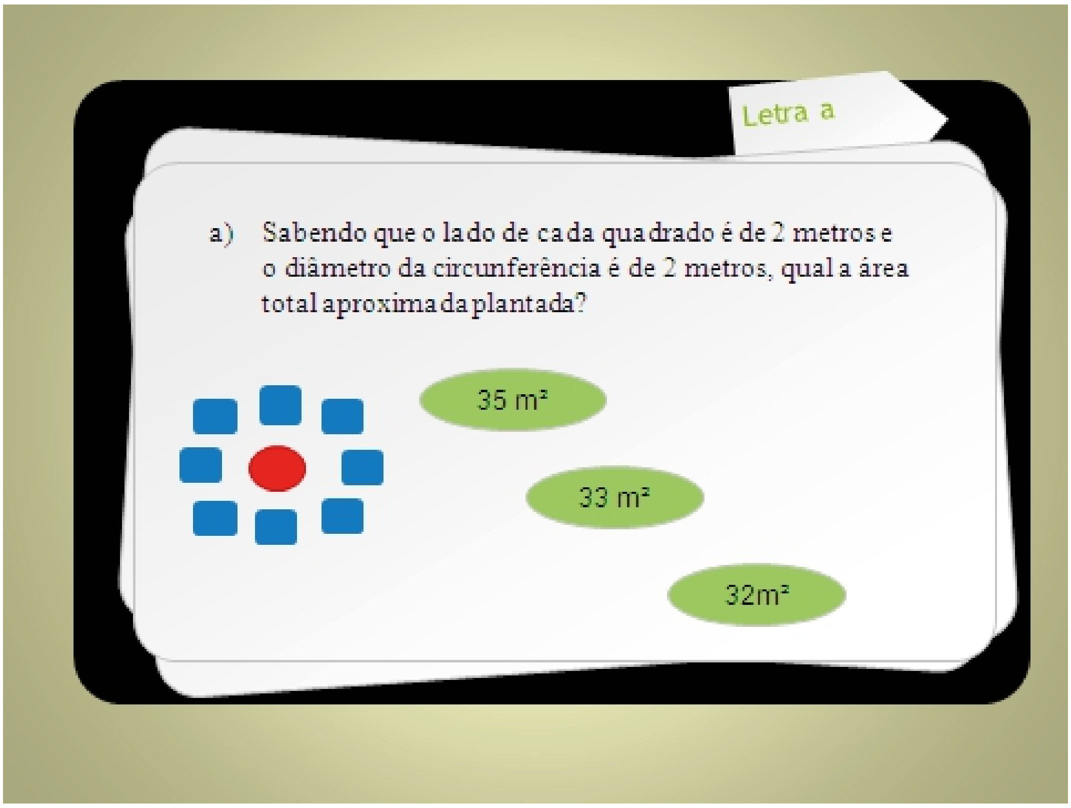
Na tela a seguir, é apresentada a segunda questão do produto, com as opções de respostas. Cada resposta também leva a um agente pedagógico que vai dar o *feedback*.



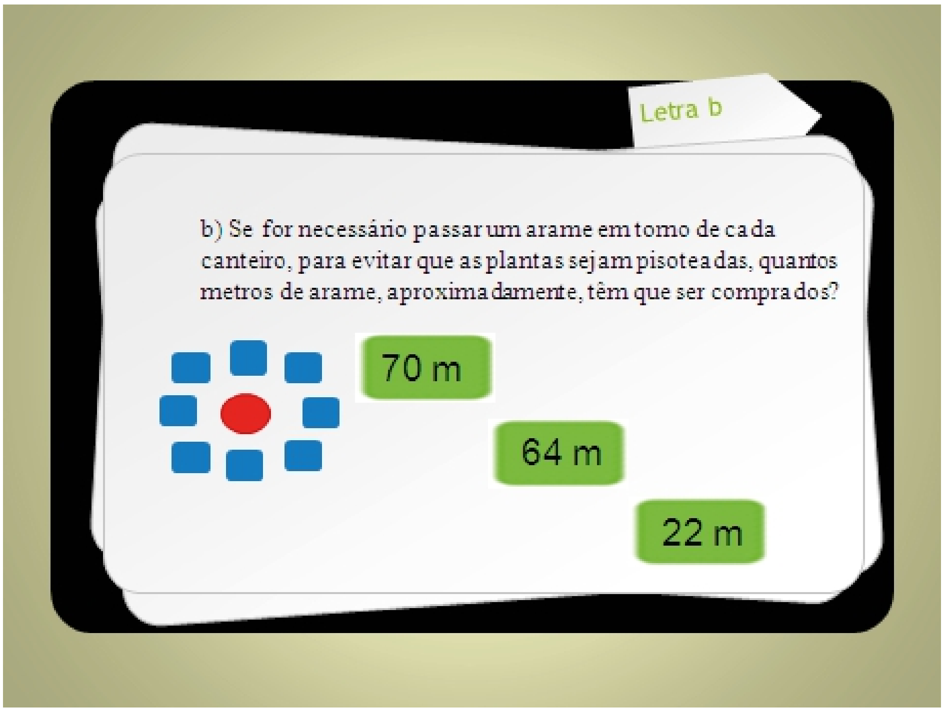
Na terceira questão, novamente há dois itens.



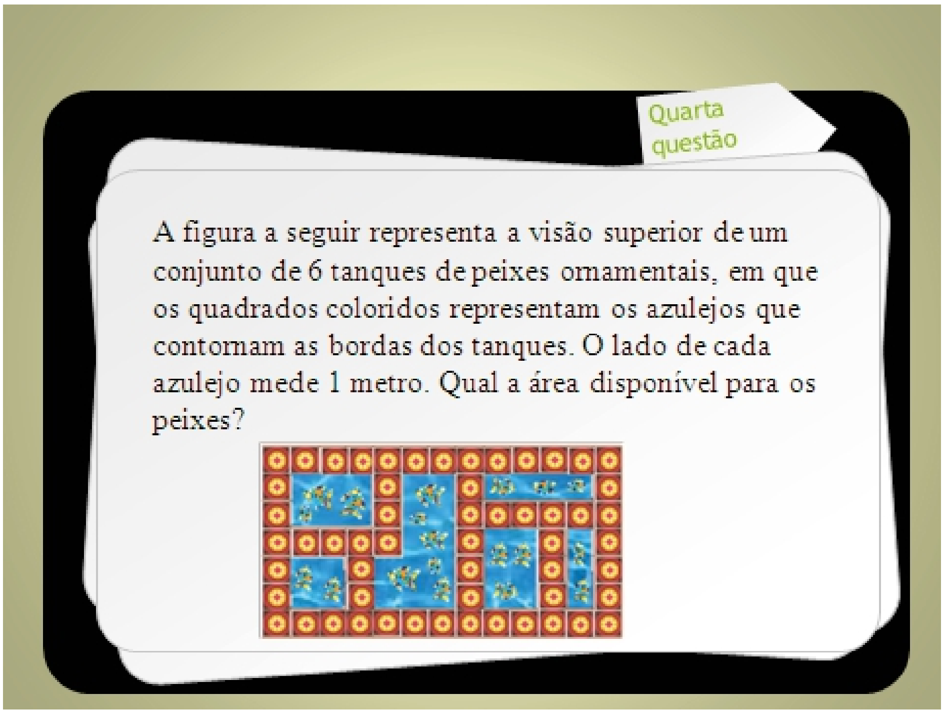
No primeiro item, indicado na tela a seguir, com as opções de resposta, cada parte da figura surge com movimento, para salientar ao aluno os dois tipos de região para as quais vai calcular a área, somando-as ao final.

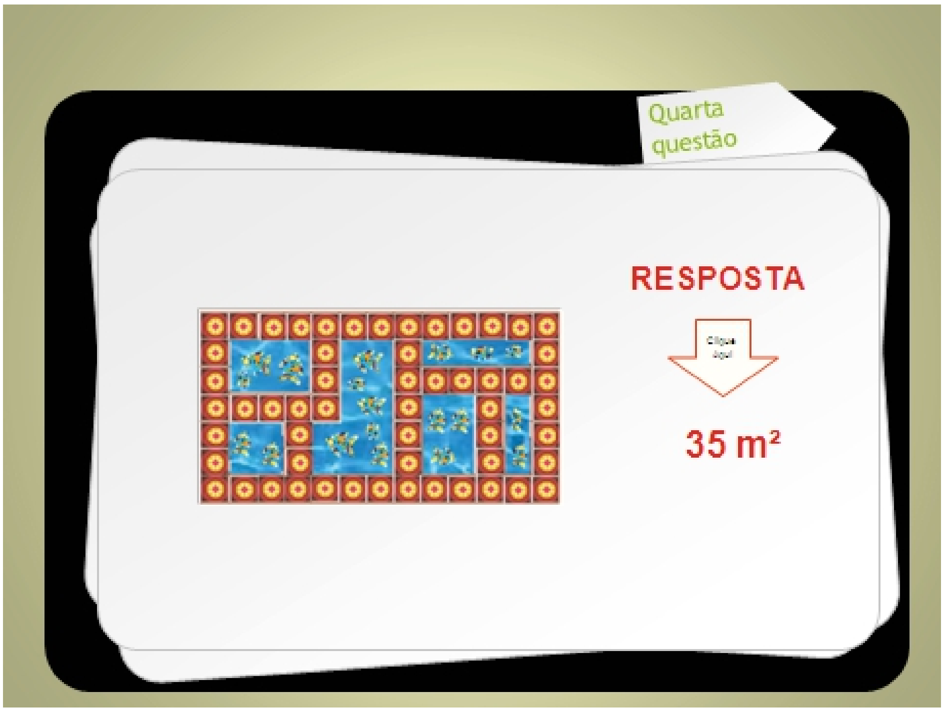


A tela mostra três opções de resposta, com os respectivos *feedbacks*, não repetidos aqui. No item b, novamente surgem as opções de respostas, seguidas dos respectivos *feedbacks*.

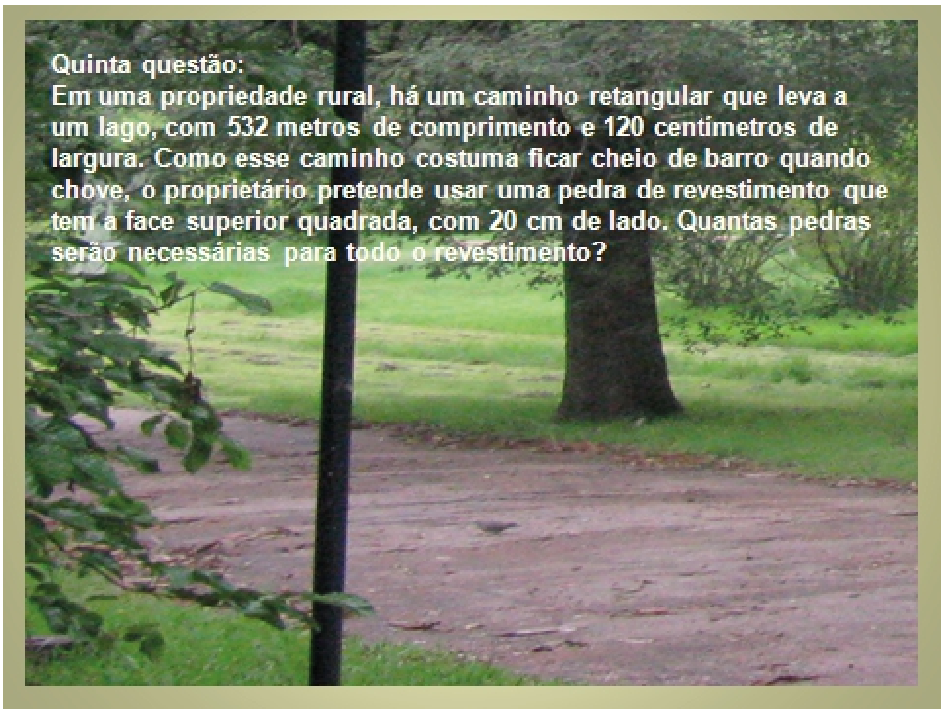


Na tela a seguir, é apresentada a quarta questão. Na seguinte, há uma flecha que aponta para a resposta. O aluno, após realizar os cálculos, deve clicar na flecha para conferir o resultado.

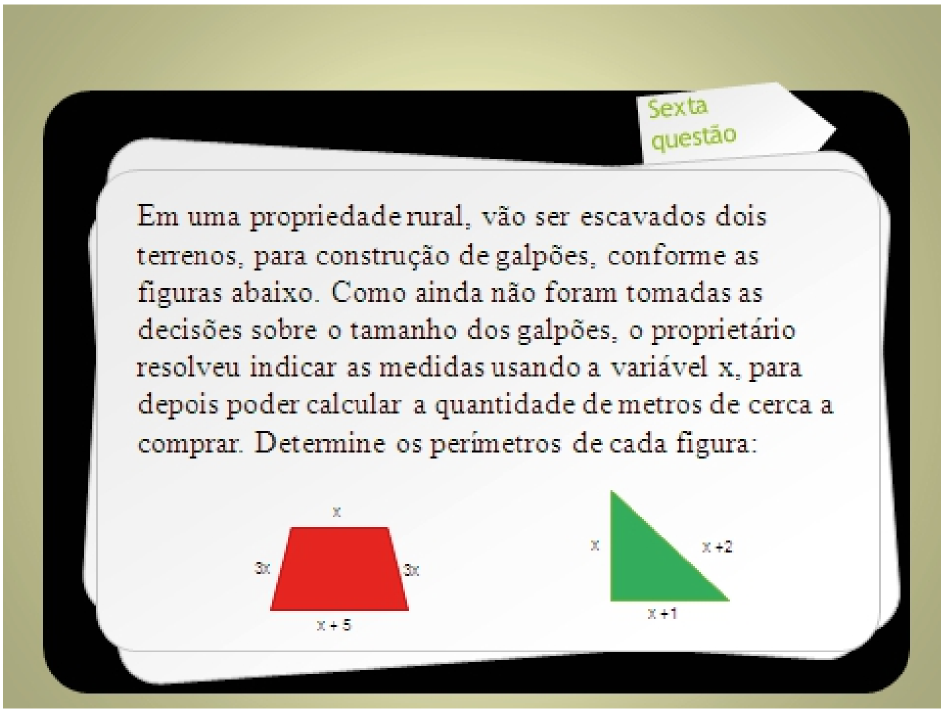




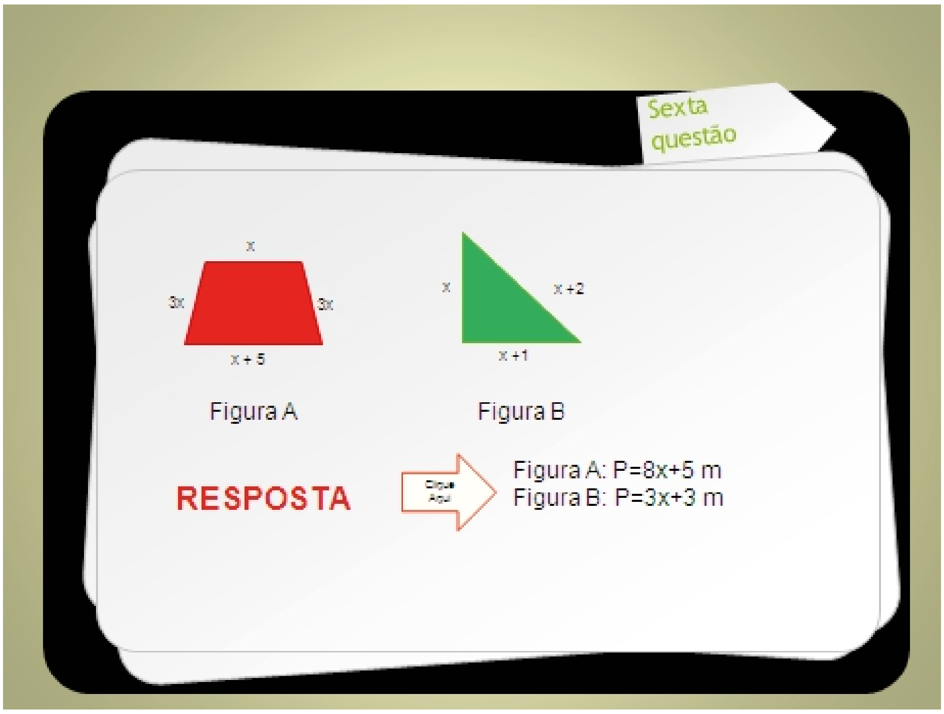
Na tela a seguir, há a quinta questão, a qual também é seguida por outra que mostra uma flecha para clicar, após realizados os cálculos, para obter o resultado.



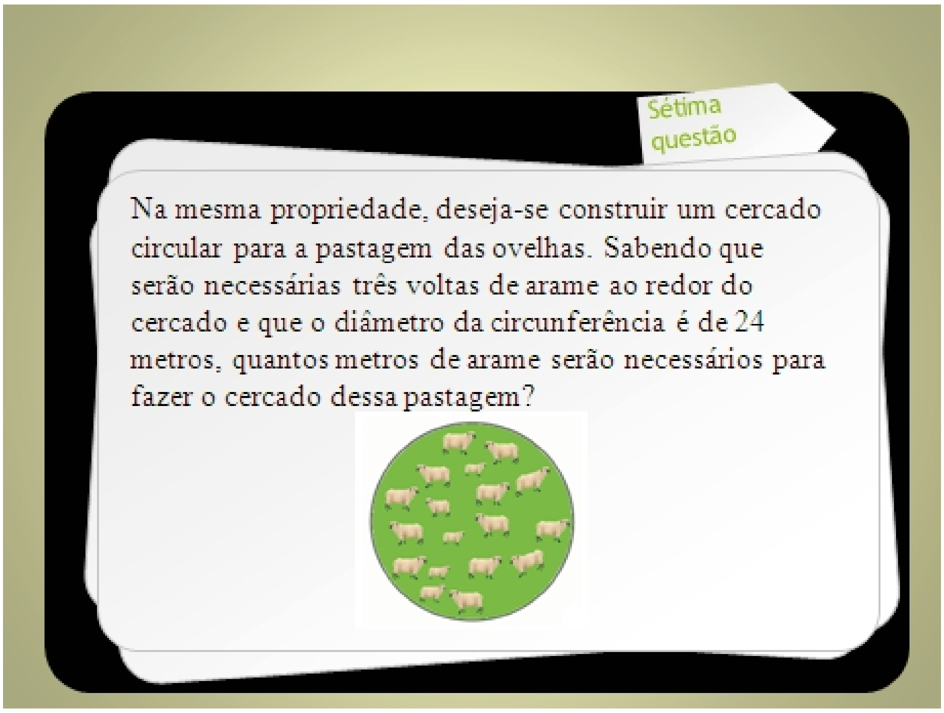
A sexta questão vai além dos cálculos, pois questiona a representação do perímetro quando os lados são expressões algébricas, como vemos na tela a seguir:



A tela seguinte permite que o aluno confira as respostas após o cálculo, clicando na flecha:



Finalmente, a sétima questão traz outro problema sobre perímetro, que exige interpretação do enunciado, haja vista que menciona as três voltas do arame. Novamente, a tela é seguida por outra que traz a resposta após um clique em uma flecha.



Como mencionamos anteriormente, este objeto pode ser modificado, porque podem ser construídas novas questões ou mesmo novos enunciados que aproveitem as respostas. Com isso, o professor poderá inserir uma ou mais questões em um teste, em um trabalho a distância, em uma plataforma como o MOODLE, etc.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao construir os problemas propostos para os alunos, buscamos trabalhar com conteúdos contextualizados, apresentando situações que envolvem elementos de Geometria em propriedades rurais e jardins, além de outras que são típicas de exames vestibulares. Assim, os exercícios basearam-se no conteúdo de perímetro e área de figuras, previsto para Ensino Fundamental, mas, neste caso, revisados no Ensino Médio.

Pensando em diferentes metodologias para o ensino de Geometria, optamos por construir um objeto de aprendizagem, para auxiliar alunos e professores a lidar com dificuldades relacionadas a perímetro e área de figuras planas. Por ter sido desenvolvido a partir de uma análise de erros cometidos pelos alunos participantes desta pesquisa, acreditamos que o produto proposto servirá para que os estudantes reconstruam seu conhecimento, ou ainda que o aprofundem, porém defendemos a ideia que não é somente o manuseio do produto que fará com que haja aprendizagem adequada. Para que o aluno consiga construir seu conhecimento, é necessário que o professor esteja disposto e preparado a trabalhar com metodologias diversificadas e com recursos variados.

Ao concluir esta pesquisa, é possível fazer uma retrospectiva sobre nossas ideias a respeito dos erros. Antes, acreditávamos que, se o aluno, ao resolver um exercício, cometeu um erro, o problema pode estar nele ou no professor; atualmente, pensamos no erro não como um problema, mas como um dado a ser analisado, que pode ser muito eficaz na construção do conhecimento do aluno. Entretanto, para isso o professor precisa saber realmente analisar e trabalhar com o erro.

Também, nas avaliações realizadas com os alunos, analisávamos os acertos desprezando os erros, considerando que havia sucesso quando um aluno gabaritava as respostas. Vemos agora que nem sempre o acerto mostra que o aluno realmente sabe tal conteúdo, mas o erro permite analisar o motivo pelo que não conseguiu acertar, podendo não ser dificuldade no conceito estudado no momento, mas em conhecimentos que não foram construídos anteriormente ou, até mesmo, por causa de obstáculos representados por conhecimentos que foram adquiridos de forma equivocada.

Portanto, são muitos os benefícios proporcionados por esta pesquisa, mas o principal é não ver somente o acerto como vitória e o erro como uma derrota. Como sugestões para futuras pesquisas envolvendo os conceitos de perímetro e área, ou mesmo os erros de estudantes, de maneira geral, podemos pensar, inicialmente, em buscar um referencial que enfoque teorias cognitivas e sociocognitivas da aprendizagem de Matemática. Essa fundamentação poderia, posteriormente, embasar novos estudos sobre o uso de tecnologias de informação e comunicação no ensino e, também, a construção de novos objetos de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. 5. reimpressão. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1979.

BERCHT, M. **Em direção a agentes pedagógicos com dimensões afetivas**. 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006.

BRUM, L. D. **Análise de erros cometidos por alunos de 8° ano do ensino fundamental em conteúdos de álgebra**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2013.

BURIASCO, R. L. C. **Avaliação em matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

CURY, H. N. Retrospectiva Histórica e perspectivas atuais da análise de erros em Educação Matemática. **Revista Zetetiké,** v. 3, n. 4, p. 39-50, 1995.

CURY, H. N. “Professora, eu só errei um sinal!”: como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: CURY, H. N. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores:** reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: Edipucrs, 2004. p.111-138.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DAVIS, C.; ESPÓSITO, Y. L. Papel e função do erro na avaliação escolar. **Cadernos de Pesquisa**, n. 74, p. 71-75, ago. 1990.

DELIZOICOV, D. Problemas e problematizações. In: PIETROCOLA, M. **Ensino de Física**: conteúdo, metodología e epistemología em uma concepção integradora. 2. ed. Florianópolis: Ed. Da UESC, 2005.

HANDA, J. K.; SILVA, J. B. G. **Objetos de Aprendizagem (Learning Objects).** 2003. Disponível em: <http://www.ggte.unicamp.br/ggte/site_ggte/arquivos/publicacoes/Coletanea_BoletimEADisbn.pdf>. p. 115-118. Acesso em: 06 jun. 2015.

IEEE Learning Technology Standards Committee. **Draft Standard for Learning Object Metadata.** Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2000.

KAIBER, C. T.; ANDRADE, L. S. Reflexões sobre o papel do erro no processo de ensino e aprendizagem da matemática. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 3., 2005, Canoas. **Anais...** Canoas: ULBRA, 2005.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática:** estudo do erro no ensino da Matemática Elementar**.** Campinas, SP: Papirus, 2000. (Série Prática Pedagógica).

POLSANI, P. R. Use and abuse of reusable learning objects. **Texas Digital Library**, v. 3, n. 4, 2003. Disponível em: <https://journals.tdl.org/jodi/index.php/jodi/article/view/89/88>. Acesso em: 06 jun. 2015.

ROCHA, I. C. Ensino da Matemática: formação para exclusão ou para a cidadania? **Educação Matemática em Revista**, n. 9/10, p. 22-31, abr. 2001.

TORRE, S. de la. **Aprender com os erros**: o erro como estratégia de mudança. Porto Alegre: Artmed, 2007.

VALÉRIO, M. Os desafios da divulgação científica sob o olhar epistemológico de Gaston Bachelard. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 5., Rio de Janeiro, 2005. **Anais**... Rio de Janeiro, 2005. Disponível em: <http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/venpec/conteudo/artigos/3/pdf/p153.pdf>. Acesso em: 27 maio 2015.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em Matemática.** 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DOS ERROS DE ALUNOS INGRESSANTES EM CÁLCULO DIFERENCIAL EM QUESTÕES DE ÁLGEBRA ELEMENTAR

Thaísa Jacintho Müller

1. INTRODUÇÃO

As dificuldades de alunos de Cálculo Diferencial e Integral têm sido discutidas por vários pesquisadores (GIRALDO, 2004; HARDY, 2008; NASSER, 2009, entre outros) e muitas vezes destacam-se, nessas pesquisas, concepções errôneas sobre conceitos estudados desde o Ensino Fundamental. Uma das dificuldades mais comuns na aprendizagem na educação básica – e, de certa forma, também nos primeiros anos do ensino superior –, relatada em estudos nacionais e estrangeiros, é relacionada à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (MARIOTTI; CERULLI, 2001; BORTOLI, 2011; BRUM; CURY, 2013; MORAES, 2013). Essa dificuldade surge, nas respostas a questões de Cálculo Diferencial, quando os alunos precisam trabalhar com limites e derivadas, em que a distributividade se faz presente em simplificações de frações algébricas, por exemplo.

Ao iniciar um novo semestre letivo, costumamos aplicar um teste diagnóstico para identificar necessidades dos alunos antes do trabalho com limites e derivadas e, no início do segundo semestre de 2015, foi aplicado um teste composto por cinco questões abertas a uma turma de 38 alunos de Cálculo I de uma Instituição de Ensino Superior do Rio Grande do Sul. Novamente ficou evidenciada a dificuldade desses estudantes em relação à distributividade.

Sendo um tema que tem surgido em vários trabalhos, consideramos que é válido relatar essa nova investigação, visto que, a partir dos resultados, podemos pensar em estratégias de ensino que possam superar tais dificuldades, buscando um melhor aprendizado dos conteúdos de disciplinas matemáticas de cursos superiores. Entre essas possíveis estratégias, destaca-se o uso de objetos de aprendizagem, como os produtos criados por Bortoli (2011) e Brum (2013), bem como o que foi apresentado em Müller, Cury e Lima (2013).

Assim, a pesquisa aqui relatada teve como **objetivo** analisar erros em respostas de alunos de Cálculo Diferencial e Integral a questões sobre conteúdos de Álgebra elementar, com vistas a uma posterior utilização dos resultados para a elaboração de estratégias de ensino da propriedade distributiva.

2. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição – ou, ainda, de uma operação em relação a outra – é um tópico apresentado, em geral, a alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, surgindo no ensino de outros tópicos, no Ensino Médio e também em disciplinas matemáticas distribuídas nas grades curriculares de cursos superiores. É um tópico de Álgebra e, assim, pode ser enfocado sob várias perspectivas, conforme os pesquisadores que se debruçam sobre o ensino e aprendizagem dessa área da Matemática.

Entre as várias expressões que têm sido definidas nesses trabalhos em educação algébrica, destacam-se "sentido do símbolo" e "visão algébrica". Pierce e Stacey (2004) consideram que houve duas tentativas importantes de descrever o sentido do símbolo, a primeira delas realizada por Fey (1990), e a segunda, por Arcavi (1994). No trabalho de Arcavi (1994), ele estende as situações mencionadas por Fey, descreve e discute comportamentos que, em sua opinião, ilustram o significado de "sentido do símbolo". Algumas considerações sobre esses comportamentos são apresentadas a seguir, junto de alguns exemplos.

A habilidade de fazer "amizade" com os símbolos implica ter uma compreensão de que os símbolos podem e devem ser usados em uma resolução de problema e, também, de quando devem ser abandonados por outras soluções não algébricas.

Arcavi (1994) também aponta a importância de saber abandonar a manipulação algébrica quando outras representações oferecem uma solução mais simples. É o caso do problema enunciado por: "Para quais valores de x temos $|x - 2| > |x - 6|$?" Uma solução algébrica, envolvendo desigualdades, exige um trabalho técnico e com possibilidade de cometer erros. Neste caso, o esboço dos gráficos das funções dadas por $f(x) = |x+2|$ e $g(x) = |x-6|$ e permite uma solução quase imediata.

Arcavi (1994) considera, ainda, que não basta conhecer as manipulações algébricas para resolver problemas que envolvem símbolos, em alguns casos é preciso entender o significado desses símbolos. O autor aponta quatro comportamentos essenciais: leitura ao invés de manipulação de símbolos; leitura e manipulação; leitura como objetivo para a manipulação; e leitura para uma compreensão racional.

O primeiro comportamento pode ser exemplificado com dados de uma investigação realizada por Hoch e Dreyfus (2004), em que alunos de Ensino Médio, ao tentar resolver a equação $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{132}$ encontraram o denominador comum dos termos do primeiro membro da igualdade e fizeram toda a manipulação algébrica, ao invés de notar, em uma simples leitura, que o primeiro membro da equação é nulo, portanto, não há solução. Dessa forma, interromper a manipulação, ler e entender o que a relação simbólica indica faz parte do sentido do símbolo.

Quanto ao segundo comportamento, Arcavi (1994) apresenta um exemplo: se um aluno tem o sentido do símbolo, ele pode se dar conta de que a equação $\frac{2x+3}{4x+6}=2$ não tem solução, porque o numerador da fração algébrica do primeiro membro é a metade do denominador dessa fração. Se o aluno insiste em manipular a equação, chega em $x=-\frac{3}{2}$, uma vez que é exatamente o valor que não pode ser usado para substituir x na equação.

O terceiro comportamento pode ser exemplificado com um exercício de demonstração por indução, em que é solicitado: “A proposição $n!>n^2$ não é válida para todo natural maior do que zero. A partir de qual valor de $n \in N$ ela passa a ser verdadeira? Expresse a relação verdadeira e prove-a por indução”. Na resolução, não basta empregar o procedimento padrão do método de indução; é necessário ler para entender o que é pedido e, após, seguir os procedimentos da indução para demonstrar que a desigualdade vale para $n \geq 4$.

O quarto comportamento, segundo Arcavi (1994), consiste em desenvolver o hábito de reler e testar (por substituições, por exemplo) uma determinada expressão obtida ao tentar resolver racionalmente um problema. Arcavi (1994, p. 22) cita um teste de álgebra da *Regents High School Examination*, de 2010, no qual se encontra o seguinte problema: “Encontre três inteiros positivos consecutivos tais que o produto do segundo pelo terceiro seja 20 mais 10 vezes o primeiro inteiro”. Se o aluno apresenta dúvidas sobre a expressão algébrica que representa a situação, ele pode, por exemplo, testar valores para verificar se sua resposta está correta, visto que a passagem da linguagem natural para a linguagem matemática é fonte de erros nesse tipo de problema.

Como a manipulação algébrica é uma capacidade que se deseja desenvolver no aluno ao ensinar Álgebra e, especialmente, no seu trabalho com fatoração e simplificação, esses casos apontados por Arcavi (1994) auxiliam a refletir sobre a proposta de resolução mecânica de uma lista de exercícios padronizados, a qual nem sempre desenvolve o sentido do símbolo.

Pierce e Stacey (2001) chamam de "visão algébrica" outro constructo que tem sido discutido entre pesquisadores do ensino de Álgebra. As autoras referem-se ao trabalho com Sistemas Algébricos Computacionais (CAS) e consideram que a visão algébrica é um subconjunto do sentido do símbolo que pode ser definido como "o conhecimento algébrico e a compreensão que permitem ao aluno entrar corretamente expressões em um CAS, digitalizar de forma eficiente o funcionamento e os resultados para possíveis erros e interpretar a saída como uma matemática convencional" (p. 418-419).

A visão algébrica, segundo Pierce e Stacey (2004), apresenta dois aspectos: expectativa algébrica e habilidade de ligar representações. O termo "expectativa algébrica" é usado para "nomear o processo de pensamento que ocorre quando um matemático experiente considera a natureza do resultado que espera obter como resultado de algum processo algébrico (e simbólico)" (p. 5). Por exemplo, quando se decide que duas expressões possivelmente são equivalentes sem fazer qualquer cálculo ou manipulação algébrica.

Em um quadro com elementos e instâncias comuns da visão algébrica, Pierce e Stacey (2004) dividem a expectativa algébrica em três elementos: a) recognição de convenções e propriedades básicas cujas instâncias comuns são o conhecimento do significado dos símbolos, da ordem e das propriedades das operações; b) identificação da estrutura, cujas instâncias comuns são a identificação de objetos e de grupos estratégicos de componentes e reconhecimento de fatores simples; c) identificação de características fundamentais, relacionada à identificação de forma e termo dominante, bem como a união da forma com o tipo de solução. É essa visão algébrica a qual se espera que os alunos tenham quando vão resolver um exercício em que fatoração, simplificação ou propriedade distributiva estão envolvidas.

Ainda que não estejam, especificamente, tratando de conceitos algébricos, Tall e Vinner (1981), em trabalhos que enfocam limite e continuidade, trazem duas definições que podem esclarecer algumas construções de estudantes em suas respostas, a saber, **imagem do conceito** e **definição do conceito**. Segundo Vinner (1983), a imagem de um conceito é algo não verbal, associado, na mente, ao nome do conceito. Por exemplo, ao usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, muitos alunos referem-se ao "chuveirinho", devido ao esquema visual que muitas vezes lhes é apresentado.

Já a definição do conceito, segundo Tall e Vinner (1981), é uma maneira de usar palavras para especificar o conceito em questão. Pode ser aprendido por um aluno somente por memorização mecânica ou aprendido de maneira significativa, relacionando-se em maior ou menor grau com o conceito como um todo. De certa forma é o que o aluno evoca da imagem daquele conceito.

Consideramos que muitos alunos possuem apenas a imagem de alguns conceitos básicos e fundamentais para progredir na aprendizagem do Cálculo, como os conceitos algébricos de fatoração, simplificação e propriedade distributiva, não chegando à sua definição, o que prejudica o seu desenvolvimento na disciplina. Este fato pode ser comprovado em investigações já realizadas por nós (MÜLLER; CURY; LIMA, 2013), bem como na análise dos erros das questões apresentadas neste capítulo.

3. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A pesquisa aqui relatada tem caráter qualitativo, de cunho interpretativo. O teste foi aplicado a 38 alunos de Cálculo Diferencial I, na primeira aula da disciplina, para fazer um diagnóstico dos seus conhecimentos sobre alguns tópicos de Álgebra elementar. A concordância em resolver as questões configurou sua autorização para utilização das respostas em trabalhos acadêmicos. Os estudantes foram nomeados pela letra A, seguida de um número de 1 a 38, para preservar suas identidades.

Após o recolhimento das resoluções, foram separadas e corrigidas as três questões a seguir apresentadas, para as quais foram solicitados ao aluno a resposta e o desenvolvimento:

1) Decompondo o polinômio $P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 6x$ em fatores do 1º grau, obtém-se:
2) O valor de x na equação $(x + 3)(x - 2) = (x + 1)^2$ é:

3) O valor de x na equação $\frac{4(x-3)}{2} - \frac{x-5}{6} = 1 - \frac{x+2}{4}$ é:

As respostas foram separadas em *corretas, parcialmente corretas e incorretas;* para essa classificação, foram adaptados critérios apresentados em Ponte et al. (1997). Assim:

- **a resposta é correta** quando o aluno compreende a questão, mostra conhecer o conteúdo e usa estratégias adequadas para a solução; também é considerada correta a resposta em que é cometido apenas um erro de cálculo final ou um erro na cópia dos dados da questão, desde que as estratégias tenham sido bem escolhidas e implementadas.
- **a resposta é parcialmente correta** quando há evidências de o aluno ter selecionado estratégia adequada, mas sua implementação não está totalmente explicada; ou quando usa estratégias adequadas, desenvolvimento correto, mas chega a uma resposta final incorreta.
- **a resposta é incorreta** quando o aluno usa estratégia inadequada e chega a uma resposta incorreta; ou quando usa uma estratégia adequada, entretanto não a implementa corretamente e assim não chega a uma solução correta.
- **resposta em branco** é quando o aluno, efetivamente, não apresenta resposta ou apenas copia os dados do enunciado, sem qualquer tentativa de solucionar.

A partir dos critérios acima descritos, foi construído o quadro 1, com a distribuição das categorias de respostas por questão:

Quadro 1– Distribuição das categorias de respostas.

Categorias	**Questões**					
	1		**2**		**3**	
	N.	%	N.	%	N.	%
C	1	3	17	45	5	13
PC	3	8	4	11	0	0
I	21	55	13	34	23	61
EB	13	34	4	11	10	26
Total	**38**	**100**	**38**	**100**	**38**	**100**

Fonte: dados da pesquisa.

Para analisar os erros detectados no desenvolvimento das respostas a cada questão, foram separadas as parcialmente corretas e incorretas. É sobre esse conjunto que foi feita a análise.

Questão 1:

Nesta questão, foram consideradas **parcialmente corretas** as respostas dos alunos A18, A21 e A22. Os alunos A18 e A21 encontraram duas raízes, fatoraram o polinômio, mas se esqueceram da raiz zero. Já A22 encontrou as três raízes, todavia se esqueceu do coeficiente 3.

Vinte e uma respostas foram consideradas **incorretas** e foram agrupadas, conforme os erros detectados, em quatro classes, abaixo descritas:

Classe A: seis alunos compreenderam que deveriam fatorar o polinômio, entretanto somente iniciaram o processo, colocando em evidência *x* ou *3x*. Além desses, o aluno A13 entendeu que deveria fatorar e encontrar raízes, mas errou a fatoração, escrevendo "$x^2(x+3)-6x=0$". Assim, parece-nos que esse estudante tem alguma imagem do conceito decomposição de polinômios, mas não sabe processar algebricamente a expressão.

Classe B: seis alunos entenderam que deveriam obter as raízes do polinômio para poder fatorá-lo, no entanto, cometeram erros nas tentativas. O estudante A33, apesar de ter obtido corretamente as raízes, não decompôs o polinômio em fatores de 1º grau; dois estudantes erraram a obtenção das raízes pela fórmula de Bhaskara; dois outros apenas determinaram a raiz $x=0$ e um último aluno apresentou o seguinte desenvolvimento[27]:

$$3x(x^2+x-2)\ ;\ 3x=0\ ;\ \frac{-1\pm 3}{2} \rightarrow x = 1\,, x = -2$$

Na resolução, destaca-se o fato de que, para esse aluno, resolver a equação $3x=0$ significa "passar para o segundo membro trocando o sinal", sem levar em conta a operação envolvida nessa "passagem". Destaca-se, então, a memorização de uma "regra" sem entender o contexto no qual poderia ser empregado o procedimento memorizado. Como menciona Arcavi (1994), não basta conhecer as manipulações algébricas para resolver esse problema, os alunos deveriam entender, também, o sentido dos símbolos empregados.

[27] Como as resoluções estavam escritas a lápis, foi necessário digitá-las, porque o escaneamento não possibilitou uma imagem nítida.

Classe C: cinco alunos derivaram a expressão P(x). Dois deles igualaram a derivada a zero e não concluíram o procedimento; um aluno apresentou as derivadas de 1º e 2º ordens; dois estudantes obtiveram a derivada primeira, mas de forma incorreta.
Classe D: três alunos apenas iniciaram a resolução, igualando o polinômio a zero, sem continuar o processo.

Das respostas **em branco**, destaca-se a observação do aluno A31, que escreveu: "não me vem à memória".

Uma síntese quantitativa desses dados é apresentada no quadro 2:

Quadro 2 – Distribuição de erros por categorias, nas respostas da questão 1.

Classes	N.	%
A	7	33
B	6	29
C	5	24
D	3	14
Total	**21**	**100**

Fonte: dados da pesquisa.

Questão 2:

Nesta questão, foram consideradas **parcialmente corretas** as resoluções de quatro alunos, que solucionaram a equação até o último passo, errando apenas a passagem do termo "7" para outro membro, obtendo x=7, ao invés de x=-7.

Para a classificação das respostas **incorretas**, foi feita, inicialmente, uma separação entre dois grupos: aquelas em que os estudantes acertaram a multiplicação dos binômios (incluído o quadrado da soma) e aquelas em que os alunos erraram a multiplicação.
Classe E: quatro estudantes (31% dos 13 que erraram) acertaram a multiplicação dos binômios, mas suas soluções, indicadas a seguir, mostraram dificuldades com a adição de termos semelhantes:

Aluno A6: $x^2-2x+3x-6=x^2+2x+1$; $3x=7$; $x=7/3$

Aluno A32: $x^2-2x+3x-6=x^2+x+x+1$; $3x-6=1$; $3x-6-1=0$; $3x-7=0$; $x=7/3$

Nesse caso, os estudantes cancelaram -2x do lado esquerdo com 2x do lado direito, o que produziu o termo incorreto 3x.

Aluno A19: $x^2-2x+3x-6=x^2+x+x+1$; $-x-6=2x+1$; $-3x=6+1$; $x=-7/3$

Nessa resposta, é interessante destacar que, para fazer a multiplicação, A19 indicou as operações desenhando os arcos que usualmente os estudantes chamam de "chuveirinho", recurso que mostra ter uma imagem de conceito da propriedade distributiva que considera elementos corporificados (TALL, 2013).

Aluno A20: $x^2-2x+3x-6=x^2+x+x+1$; $x^2-2x+3x-6-x^2-x-x-1=0$; $-4x-7=0$; $x=-7/4$

Classe F: nove alunos (69% das 13 respostas incorretas) erraram a multiplicação dos binômios por vários motivos, comentados a partir das respostas apresentadas a seguir:

Os alunos A13, A23, A29 e A35 erraram o quadrado da soma, escrevendo apenas "x^2+1", o que gerou erro no restante do desenvolvimento; A23, além desse erro, ainda obteve as raízes $x=2$ e $x=-3$, da equação $x^2+x-6=0$, a partir da expressão do lado esquerdo da igualdade, todavia não conseguiu efetuar o mesmo cálculo para a equação $x^2+1=0$ e abandonou a solução.

Os alunos A8 e A26 erraram a multiplicação dos binômios do lado esquerdo da igualdade, obtendo $x^2-2x+3x-5$ *e* x^2+x-6, respectivamente, o que gerou a solução incorreta final.

Os alunos A14 e A15 consideraram que $(x+1)^2$ é igual a $(x+1)(x-1)$ e, de acordo com essa ideia, obtiveram, no lado direito, a expressão x^2-1.

Finalmente, o aluno A36 apenas começou a solução, escrevendo "3.-2=1"; parece que esse estudante tentou "comparar" o produto dos números que aparecem em cada binômio do lado esquerdo com o número em $(x+1)$.

Esses estudantes parecem não ter a visão algébrica, especialmente o que Pierce e Stacey (2004) chamam de expectativa algébrica, visto que não reconhecem convenções e propriedades básicas das operações algébricas.

É interessante comparar esses resultados com os obtidos em uma investigação realizada com 333 alunos de Cálculo I (MÜLLER, 2015), em uma questão que solicitava a resolução da equação $(x+1)(x+2)=(x+5)^2$. Vemos que essa questão é a mesma analisada no teste aqui relatado, apenas com mudança dos números. Na pesquisa de Müller (2015), das 75 respostas erradas a essa questão, 16% envolvem erros da classe E e 56%, erros da classe F. Portanto, nessas duas investigações, mais da metade dos alunos têm dificuldades no desenvolvimento da multiplicação de dois binômios, o que envolve a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Questão 3:

Nesta questão, não houve respostas **parcialmente corretas**, em que houvesse escolha de estratégia e desenvolvimento corretos, com erros apenas no final. As 23 respostas **incorretas** foram agrupadas, conforme os erros detectados, em três classes, abaixo descritas:

Classe G: apesar de entenderem que deveriam determinar um denominador comum que lhes permitisse transformar os termos de cada membro da equação em frações de mesmo denominador, quatorze alunos (61% das 23 respostas incorretas) erraram, no desenvolvimento, a propriedade distributiva da multiplicação de (-1) em relação a uma soma ou diferença. São variadas as maneiras apresentadas por eles de usar a estratégia, mas todas têm em comum, em determinado passo, esse erro relativo à propriedade distributiva. Para exemplificar, são apresentadas algumas respostas, em que se interrompeu a digitação no ponto em que o erro foi cometido:

Aluno A6: $\frac{48(x-3)}{24}-\frac{4(x-5)}{24}=\frac{24}{24}-\frac{6(x+2)}{24}$; $48x-144-4x+20=24-6x+12$

Aluno A10: $\frac{4x-12}{2}-\frac{x-5}{6}=\frac{1}{1}-\frac{x+2}{4}$; $\frac{24x-72}{12}-\frac{2x-10}{12}=\frac{12-3x+6}{12}$

Aluno A16: $\frac{12x-36}{6}-\frac{x-5}{6}=\frac{4}{4}-\frac{x+2}{4}$; $\frac{11x-41}{6}=\frac{6-x}{4}$

Aluno A28: $\frac{4x-12}{2}-\frac{x-5}{6}=\frac{1}{1}-\frac{x+2}{4}$; $\frac{12x-36-x-5}{6}=\frac{4-x+2}{4}$

A28 errou, no segundo passo, os sinais de (-5) e de (+2), mas continuou o desenvolvimento, cometendo ainda mais alguns erros e encontrando, ao final, $x=3,91$. Talvez por esperar que a resposta fosse um número inteiro, A28 escreveu: “Errado :(”

Classe H: Nove estudantes (39% das 23 respostas incorretas), iniciando ou não a solução pela determinação do denominador comum para as frações, evidenciaram concepções errôneas sobre manipulações algébricas. Os exemplos não formam um padrão, por isso são todos apresentados, com alguns comentários:

Aluno A4: $\frac{4x-12}{2} - \frac{x-5}{6} = \frac{1x+2}{4}$;

Aluno A27: $\frac{4x-12}{2} - \frac{x-5}{6} = 1 - \frac{2x}{4}$

Esses alunos consideram ser possível adicionar termos não semelhantes.

Aluno A26: $\frac{4x-12}{2} - \frac{x-5}{6} = 1 - \frac{x+2}{4}$; $\frac{4x-12-3x+5}{2} = \frac{2-4x-2}{2}$

Aluno A29: $\frac{4x-12}{2} - \frac{x-5}{6} = 1 - \frac{x+2}{4}$; $\frac{3x-17}{-4} + \frac{x+2}{4} = 1$

A26 e A29 copiaram corretamente a questão, já efetuando o produto de 4 por x-3, mas cometem erros ao tentarem determinar um denominador comum.

Aluno A12: $\frac{4x-12}{2} - \frac{x-5}{6} = 1 - \frac{x+2}{4}$; $\frac{12x-36}{6} - \frac{x-5}{6} =$; $\frac{12x-31}{6} + \frac{x+2}{4}$

A12 parece tentar resolver separadamente os dois membros, todavia, entre outros erros, "perde" o inteiro 1 do segundo membro.

Aluno A18: $\frac{4x-3}{2} - \frac{x-5}{6} = 1(-\frac{x+2}{4})$

Nota-se que A18, além de ter errado a distributividade do produto de 4 por x-3, não entende que no segundo membro há um racional, $\frac{1}{1}$, que deve ser somado à fração algébrica.

Aluno A21: (x-3-x-5)4

Este aluno não parece ter ideia do que deveria ser feito no exercício, pois erra todos os procedimentos iniciais.

Aluno A33: $\frac{4(x-3)}{2} - \frac{x-5}{6} + \frac{x+2}{4} - 1 = 0\ ;\ \frac{24(x-3)-2x+10+3x+6-12}{12} = 0\ ;$

$24(x\text{-}3)\text{-}2x+10+3x\text{-}6\text{-}12=0\ ;\ 24(x\text{-}3)+x=8\ ;\ x\text{-}3+x = \frac{8}{24}$

A33, apesar de ter iniciado corretamente e até mesmo ter usado a estratégia de passar todos os termos para o primeiro membro, trocou o sinal do +6, ao copiar o numerador; mas o maior problema evidenciado é ter "passado" o coeficiente 24, do termo (x-3) para o lado direito, dividindo 8.

Aluno A38: $\frac{4(4-3)}{2} - \frac{4-5}{6} = \frac{1-4+2}{4}$

Não fica clara a razão pela qual A38 entendeu que deveria substituir x por 4 na expressão, visto que não tinha, ainda, encontrado o valor de x solicitado.

Na comparação com a pesquisa de Müller (2015), em que também foi proposta aos 333 alunos a resolução de uma equação com frações algébricas, 60% dos respondentes mostraram ter dificuldades em relação à propriedade distributiva, uma percentagem quase igual à desta investigação.

Sintetizando os dados relativos à pesquisa aqui relatada, destacam-se as classes F e G e ambas indicam dificuldades com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Esta parece ser, portanto, a maior fonte de erros em problemas que envolvem a Álgebra elementar, o que leva às considerações finais sobre esta pesquisa.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados da investigação aqui relatada não são surpreendentes, haja vista que vêm se repetindo em cursos de Cálculo I, há muitos anos e em muitas instituições. O que pode surpreender é a falta de solução para tais dificuldades ou, pelo menos, a repetição dos mesmos erros apesar de algumas tentativas com uso de estratégias de ensino diferenciadas.

Dois trabalhos que merecem atenção, pelas possibilidades que se abrem para repensar o ensino das propriedades das operações com expressões algébricas, são as de Mariotti e Cerulli (2001) e a de Moraes (2013). As primeiras autoras apresentaram a alunos de 9º ano[28] três expressões algébricas e perguntaram quais eram equivalentes, solicitando a prova para a resposta. Para provar, os estudantes precisavam usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Chama a atenção o fato de que os alunos também usaram o "chuveirinho" para mostrar como faziam a multiplicação.

A importância do trabalho de Mariotti e Cerulli é o uso de um *software*, *L´Algebrista*, para auxiliar os alunos a provarem propriedades das operações algébricas. Esse *software*, anunciado no trabalho das autoras e fruto da tese de Cerulli, apresentado em <http://www.mkvale.it/mk/LAlgebrista/>, é um programa didático para manipulações algébricas, para a introdução dos alunos à Álgebra e ao pensamento algébrico. No entanto, parece não ter sido desenvolvido posteriormente.

Também usando um *software*, Moraes (2013) analisou erros de alunos do 1º ano do Ensino Médio. Partindo de estudos sobre erros e dificuldades na resolução de equações polinomiais de 1º grau, a autora propôs atividades aos estudantes, em um laboratório de informática no qual eles dispunham do *software* Aplusix. Conforme Moraes (2013, p. 37),

> o Aplusix é um *software* de álgebra destinado à realização de cálculos algébricos, permitindo o trabalho com vários conteúdos, como equações, inequações, sistemas de equações, entre outros. Uma das grandes dificuldades encontradas pelos alunos, ao resolverem um exercício de matemática, é saber se ele está correto ou não e esse *software* permite uma validação constante dos seus cálculos, indicando a equivalência ou não das etapas no desenvolvimento da atividade.

Face aos erros encontrados em nossa investigação, que são claramente originados em dificuldades com conteúdos de Álgebra do Ensino Fundamental, consideramos que é urgente pensar em estratégias de ensino que possam levar os estudantes, especialmente os calouros, que ingressam em cursos superiores com pouca base em conteúdos prévios, a revisar esses tópicos.

Muitas experiências com disciplinas do tipo "Pré-cálculo" têm sido feitas (DOERING; NACUL; DOERING, 2004; NOGUTI, 2014, entre outras), usando variadas abordagens metodológicas. No entanto, os alunos que apresentam

[28] A investigação foi realizada na Itália.

maiores dificuldades em conteúdos prévios nem sempre procuram essa disciplina, especialmente se não é obrigatória ou, em instituições privadas, se exige pagamento de mais créditos.

Acreditamos, assim, que a utilização de ambientes virtuais de aprendizagem pode vir ao encontro das necessidades de alunos e professores, face à falta de tempo dos alunos, pela alta carga horária do primeiro semestre dos cursos superiores, bem como às possibilidades de trabalhar com os recursos em várias mídias, como computadores, tablets ou smartphones.

Em Müller (2015), por exemplo, foi realizada uma experiência no ambiente MOODLE que trouxe resultados satisfatórios. Porém, destacamos que existem também outros ambientes além do MOODLE, que possuem funcionalidades cuja adequação deve ser analisada na sua escolha. De modo geral, esses ambientes também permitem a aproximação do docente com os alunos, mesmo fora da sala de aula. Além disso, possuem diversos recursos ou ferramentas que auxiliam na promoção da aprendizagem, fomentando também a interação entre os alunos, como fóruns, bate-papos e outras variações, de acordo com o ambiente escolhido. Em geral, os ambientes também trazem a possibilidade de integração com *softwares*, aplicativos ou objetos de aprendizagem, o que proporciona ao docente mais possibilidades de utilização de recursos.

Assim, a sugestão que deixamos após esse relato é de planejar atividades em ambientes virtuais e disponibilizar, em tais ambientes, algum *software* como os citados acima, que permitem o trabalho com Álgebra, especialmente com as propriedades das operações com expressões algébricas.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. **For the Learning of Mathematics**, v. 14, n. 3, p. 24-35, 1994.

BORTOLI, M. F. **Análise de erros em matemática**: um estudo com alunos de ensino superior. 2011. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2011.

BRUM, L. D.; CURY, H. N. Análise de erros em soluções de questões de Álgebra: uma pesquisa com alunos do Ensino Fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 4, p. 45-62, 2013.

DOERING, C. I.; NACUL, L. B. C.; DOERING, L. R. O programa de pró-cálculo da UFRGS. In: CURY, H. N. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 201-223.

FEY, J. T. Quantity. In: STEEN, L. A. (Ed.). **On the shoulders of giants:** new approaches to numeracy. Washington: National Academy Press, 1990. p. 61-94.

GIRALDO, V. **Descrições e conflitos computacionais**: o caso da derivada. 2004. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

HARDY, N. A subtle interplay between ordinary, algebraic and analytic registers in college level Calculus courses as a source of students' difficulties. In: INTERNATIONAL CONGRESS IN MATHEMATICAL EDUCATION (ICME 11), 11., 2008, Monterrey, Mexico. **Proceedings.** Disponível em: <http://tsg.icme11.org/tsg/show/32>. Acesso em: 20 set. 2015.

HOCH, M.; DREYFUS, T. Structure sense in high school algebra: the effects of brackets. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen, Norway. **Proceedings.** Bergen: PME, v. 3, 2004. p. 49-56.

MARIOTTI, M. A.; CERULLI, M. Semiotic mediation for algebra teaching and learning. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht, Nederlands. **Proceedings**. Utrecht: PME, v. 3, 2001. p. 225-232.

MORAES, F. R. **Um estudo sobre erros na resolução de equações do 1º grau com o software Aplusix**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

MÜLLER, T. J.; CURY, H. N.; LIMA, J. V. Uma proposta de criação de objeto de aprendizagem a partir de análise de erros em álgebra. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas. **Anais...** Canoas: ULBRA, 2013.

MÜLLER, T. J. **Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de cálculo**: uma proposta baseada em análise de erros. 2015. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. **Educação Matemática no ensino superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. p. 43-56.

NOGUTI, F. C. H. **Um curso de matemática básica através da resolução de problemas para alunos ingressantes da Universidade Federal do Pampa-campus Alegrete**. 2014. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

PIERCE, R.; STACEY, K. A framework for algebraic insight. ANNUAL MERGA CONFERENCE, 24., 2001, Sidney, Australia, 2001. **Proceedings.** Disponível em: <http://www.merga.net.au/documents/RR_Pierce&Stacey.pdf>. Acesso em: 10 set. 2015.

PIERCE, R.; STACEY, K. Monitoring progress in algebra in a CAS active context: symbol sense, algebraic insight and algebraic expectation. **The International Journal for Technology in Mathematics Education**, v. 11, n. 1, p. 3-12, 2004.

PONTE, J. P. et al. **Didactica da Matemática.** Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação, 1997.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

CAPÍTULO 6

VISUALIZAÇÃO: UM CAMINHO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA

José Carlos Pinto Leivas

1. INTRODUÇÃO

A partir dos anos 70, o ensino de Matemática sofreu reformas em relação ao trabalho desenvolvido em sala de aula. O estudante passou a desempenhar papel tão importante quanto aos demais elementos envolvidos no âmbito escolar e, porque não, no acadêmico. Julga-se, a partir de então, que compreender os processos que conduzem os estudantes à sua aprendizagem e o professor ao seu ensino merecem cuidados cada vez mais elaborados. É de interesse do autor do texto, em suas investigações, o tratamento dado ao ensino de Geometria nos diversos níveis de escolaridade, particularmente pelo viés da visualização na construção do conhecimento.

No trabalho em cursos de formação continuada de professores, há a preocupação, no momento, de explorar aspectos didáticos envolvidos nessa formação e, para tal, se faz necessário compreender como estudantes percebem determinadas habilidades geométricas, dentre as quais a visualização em conexão com a intuição. Assim, foi desenvolvida uma investigação que consistiu em verificar como grupos de estudantes, do segundo segmento do Ensino Fundamental, do Ensino Médio, de um Curso de Graduação e de um Mestrado Profissional, resolviam uma questão envolvendo movimentos rígidos do espaço, como rotação.

Como instrumento de pesquisa, foi empregado um teste composto por uma única questão, de múltipla escolha, na qual se solicitava que o participante escolhesse uma alternativa e justificasse sua escolha. Neste capítulo, essa investigação é relatada, sendo analisados o desempenho dos alunos e a produção escrita relacionada às justificativas apresentadas.

2. ALGUNS PRESSUPOSTOS TEÓRICOS SOBRE VISUALIZAÇÃO

Para Duval (1995, apud KUZNIAK, 2011), a atividade geométrica envolve três processos cognitivos: a) um processo de visualização em relação à representação do espaço e apoio material; b) um processo de construção, determinado pelos instrumentos utilizados (réguas, compassos, etc.) e configurações geométricas; c) um processo discursivo, que produz argumentos e provas.

Segundo Kuzniak (2011), o espaço real é mais especificamente ligado à visualização por intuição, ao qual são anexados os instrumentos para a construção de um modelo teórico. Para esse autor, a questão de visualização se tornou objeto de preocupação, tanto em Matemática quanto em Didática, particularmente, a partir dos séculos XIX e XX.

Entende-se visualização como "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos" (LEIVAS, 2009, P. 22). De acordo com Kuzniak (2011, p. 12), "[...] o termo visualização que deve ser estreitamente associado com intuição e esquemas operacionais sobre signos e representações".

Para Hilbert e Cohn-Vossen (1932, p. iii)

> [...] a tendência abstrata tem levado a magníficas teorias sistemáticas de Geometria Algébrica, de Geometria Riemanniana e de Topologia; essas teorias fazem uso extensivo de raciocínio abstrato e cálculo simbólico no sentido de álgebra. Apesar disso, ainda é tão verdadeira hoje como nunca foi que compreensão intuitiva desempenha um papel importante em geometria. E essa intuição concreta é de grande valor, não só para o pesquisador, mas também para quem deseja estudar e avaliar os resultados de pesquisa em geometria.

Borba e Villarreal (2005) comentam que a pesquisa sobre visualização, na Educação Matemática, tem se apoiado em diversas definições e empregado vários procedimentos, como ambientes computadorizados. Segundo esses autores, também a terminologia usada pelos diferentes pesquisadores varia, sendo que termos como "habilidade espacial", "imagem visual" e "visualização" são encontrados e definidos.

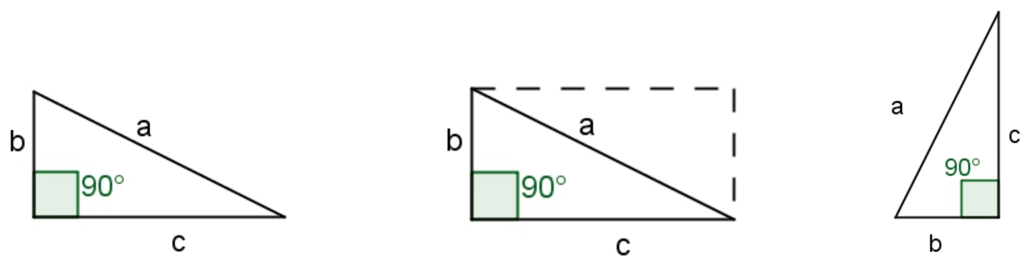
Para Zimmermann e Cunningham (1991), a origem do termo alemão *Anschauliche* apresenta certa ambiguidade, riqueza e diferentes significados como, por exemplo, intuição no sentido de formação ou contemplação de imagens mentais. Para os autores, visualização matemática não é simplesmente uma apreciação da Matemática por meio de imagens e a busca de intuição que essa visualização pretende alcançar não significa apenas uma simples espécie de intuição ou um substitutivo para compreensão matemática, senão um tipo de intuição que se estabelece no ponto vital de uma ideia matemática, produzindo significado para compreender e resolver problemas.

Assim, para esses autores, visualização matemática não é apenas uma forma de representar objetos matemáticos. Para eles, "Visualização matemática é o processo de formação de imagens (mentalmente, ou com papel e lápis, ou com o auxílio da tecnologia) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática" (ZIMMERMMAN; CUNNINGHAM, 1991, p. 3).

Para Duval (2004), a atividade matemática, que se realiza em cursos de Geometria no ensino básico, ocorre em dois tipos de registros: o das figuras e o da língua natural. No que se refere ao das figuras, esse é comandado diretamente pela percepção, o que é corroborado em Piaget e Inhelder (1973), sendo importante que o estudante estabeleça contato com o objeto a ser representado para estabelecer sua imagem mental. Assim, em sua ausência poderá obter seu registro figural e, posteriormente, descrevê-lo em linguagem natural. Dessa forma, estará visualizando o objeto como construto mental, ou seja, desenvolvendo visualização, segundo a concepção que tem o autor do artigo sobre o termo.

Como exemplo de representação, apresentamos a representação figural do triângulo retângulo, que usualmente é feita como na figura 1, particularmente, por ser resultante da divisão de um retângulo por uma de suas diagonais. Essa representação é feita no primeiro segmento do Ensino Fundamental, ou logo no início do segundo.

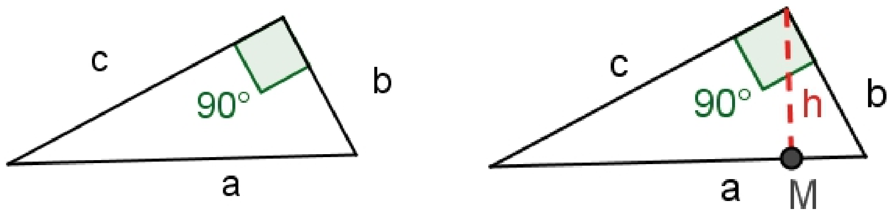
Figura 1– Representações de triângulos retângulos.



Fonte: autor.

No entanto, para a construção do conceito de altura de triângulos, é frequente se encontrar a representação do triângulo retângulo como na figura 2.

Figura 2 – Representação de triângulo retângulo e altura relativa à hipotenusa.



Fonte: autor.

Esta forma de visualizar o objeto triângulo retângulo conduz, na maioria das vezes, a que o estudante só perceba uma altura de um triângulo, no caso o segmento de medida h da figura, o qual se encontra na vertical. Ainda mais, não o leva a intuir que também os catetos, neste caso, são alturas do triângulo e assim não estabelece conexão com o conceito de área do triângulo, que pode ser obtida como a metade da área do retângulo e essa corresponde ao produto das medidas de seus dois lados, que passam a ser os catetos do triângulo. Portanto, um deles corresponde à sua altura e acredita-se que tal aspecto visual na construção do conceito é relevante para o estudante (LEIVAS; SCHERER, 2010).

Há de se considerar, além disso, que a última representação do triângulo na figura 2, em geral, é feita no final do Ensino Fundamental, quando é necessário preparar os estudantes para o Teorema de Pitágoras e para a Trigonometria, em que é necessário formular o conceito de projeção ortogonal para obter as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Além disso, está presente aqui o conceito de rotação, pois como pode ser observado nas figuras 1 e 2, o movimento de rotação é realizado e, portanto, as figuras são congruentes. Essa é uma das transformações rígidas no plano (como poderia ser no espaço) que conduzem ao desenvolvimento de habilidades visuais, segundo o entendimento do autor.

A partir disso, encontramos guarida em Duval (apud MAMMANA; VILLANI, 1998, p. 48) ao afirmar que:

> [...] em Geometria, visualização cobre, juntamente com apreensão perceptiva, discursiva e operativa de uma figura, como uma

> representação do espaço. Como não requer o conhecimento matemático, visualização desempenha um papel heurístico fundamental e, embora a apreensão operatória, pode dar algo como evidência convincente. (trad. do autor).

Por sua vez, para Fischbein (1987), o termo intuição se refere a uma enorme variedade de fenômenos cognitivos. Para ele, alguns autores a consideram um método para amparar a verdade, a essência da realidade. Ele a considera como um tipo especial de cognição que se caracteriza pela autoevidência ou imediatismo, a qual aparece de forma subjetiva, aceitável, sem necessidade de uma justificativa extrínseca, ou seja, uma demonstração formal ou suporte empírico.

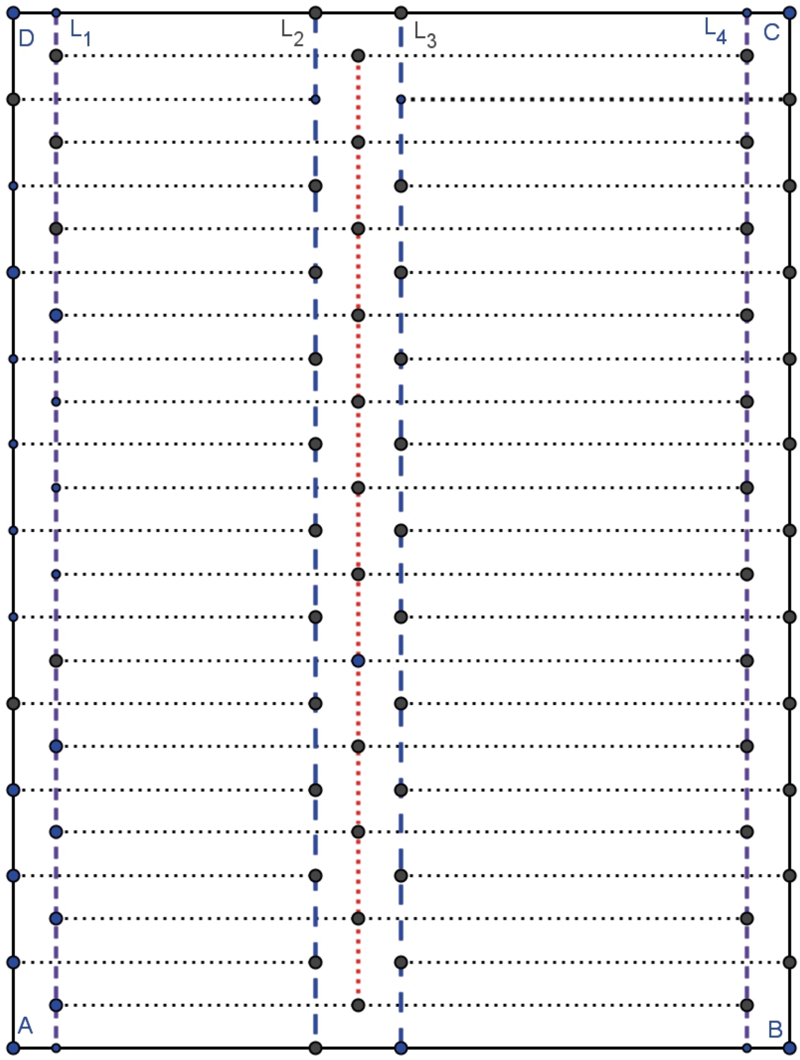
Entende-se ser a intuição algo não nato, mas processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto. Dessa forma, desenvolver atividades que propiciem ao estudante o desenvolvimento de tal habilidade pode favorecer um melhor entendimento da Geometria, o que pode ser feito pelos professores em atividades até certo ponto lúdicas, como as que são apresentadas neste capítulo, as quais despertam o interesse por novas descobertas, ou até mesmo, para desenrolar atividades que auxiliem os professores a decidirem aquilo que irão ensinar.

Freudenthal (1973) levanta o questionamento: o que é Geometria? Ao buscar resposta encaminha-a em dois níveis: 1) Em um nível mais elevado, a Geometria é uma parte da Matemática, de certo modo, axiomaticamente organizada; 2) Em um nível mais elementar, a Geometria é essencialmente a compreensão do espaço em que a pessoa vive, respira e se move. É o espaço em que a pessoa deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor. O autor ainda insiste que ela só pode ter significado pleno se for explorada sua relação com o espaço experienciado.

Ao concordar com o emérito educador matemático, cita-se uma situação didática que o professor pode explorar, utilizando um mecanismo simples para introduzir uma ideia fantástica e complexa, que é a da Curva de Peano, isto é, uma curva contínua que recobre todo o plano. É complexa em virtude de que define um conjunto denso no plano, a exemplo do que ocorre com o conjunto dos racionais na reta. Tais curvas são obtidas por meio de sucessão de curvas contínuas que não se interseccionam, porém convergem a uma curva limite e isto constitui um objeto fractal de dimensão 1 e, portanto, podem desencadear o desenvolvimento de vários conteúdos em diversos níveis. No que segue, ilustra-se uma possibilidade de construção dessa curva a partir de uma folha de papel, utilizando apenas régua, lápis e tesoura.

Partindo de uma folha de papel A4, cujas extremidades são os pontos A, B, C, D (Figura 3), constroem-se linhas auxiliares, L_1, L_2, L_3 e L_4 (observe o tracejado). Uma linha pontilhada longitudinal divide a folha pelo ponto médio dos lados AB e CD. As linhas tracejadas distam aproximadamente 1cm das bordas laterais e da linha central. Marcam-se linhas pontilhadas horizontais equidistantes (aproximadamente 1cm).

Figura 3 – Construção da Curva de Peano no plano em material manipulável.



Fonte: dados do autor.

Ao fazer os recortes pelas linhas pontilhas, obtém-se uma representação da Curva de Peano, apresentada em dois estágios para melhor acompanhamento da evolução (Figura 4).

Figura 4 – Obtenção da Curva de Peano.

Fonte: dados do autor.

Percebe-se, pela construção realizada, que a noção intuitiva do que é uma curva pode ser obtida, de forma perceptiva, com o material. Tanto mais ela se aproxima do objeto geométrico quanto mais estreitas forem as tiras demarcadas para o recorte. Para Piaget e Inhelder (1973), a representação só ocorre posteriormente à percepção, uma vez que essa última acontece na presença do objeto e a primeira, na sua ausência. Acredita-se que a atividade didática pode permitir uma imagem mental de um conceito a ser formalizado *a posteriori*.

A atividade sugerida ao desenvolver habilidades visuais remete novamente a Freudenthal (1991, p. 14, trad. do autor), quando ele afirma: "Matemática como uma atividade é um ponto de vista muito diferente da Matemática de livros impressos ou daquela impressa na mente", o que reitera o nosso forte apelo à visualização como construto mental para a construção do conhecimento geométrico. Indo mais além, o autor afirma: "essa é a Matemática como atividade de descobrir e organizar em uma interação de conteúdo e forma; mais tarde, teremos de levantar a questão de saber se o ensino da Matemática tem realmente se preocupado com este desenvolvimento" (p. 15).

A partir desses pressupostos, elaborou-se uma atividade investigativa a respeito de um conhecimento de Geometria Espacial, a qual se refere a uma forma pedagógica (a exemplo daquela feita para a Curva de Peano ou da construção de alturas de triângulos) que pode ser utilizada pelos professores para incentivar e desencadear um conteúdo dessa área, que consta dos currículos dos níveis de ensino ao qual foi aplicada a investigação. Com base nos resultados alcançados, torna-se evidente a necessidade didática de organizar conteúdos de Geometria, constantes dos currículos, e desenvolver atividades que conduzam os estudantes e professores a um conhecimento tanto pedagógico quanto de conteúdo, no caso, das transformações geométricas.

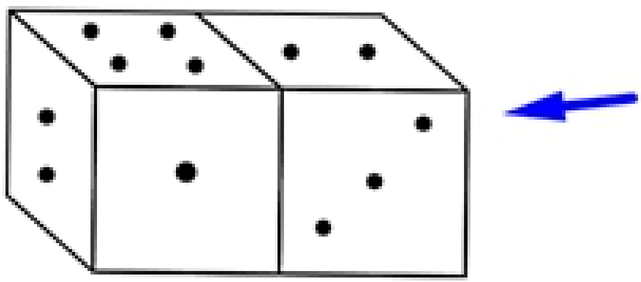
3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para analisar o tipo de resposta de alunos de vários níveis de ensino a uma situação que envolve visualização, foi elaborado um teste com uma questão de escolha múltipla, na qual foi solicitado que o aluno escolhesse uma das seis alternativas de resposta e justificasse sua decisão.

A questão elaborada tem o seguinte enunciado:

Num dado honesto, a soma das bolinhas [ou números] em faces opostas é sempre igual a 7. Tendo dois dados honestos idênticos, colocados lado a lado, como na figura, pergunta-se: quantas bolinhas [ou números] poderão estar na face não visível localizada no lado direito na posição indicada na figura pela seta? Explique como você fez para decidir.

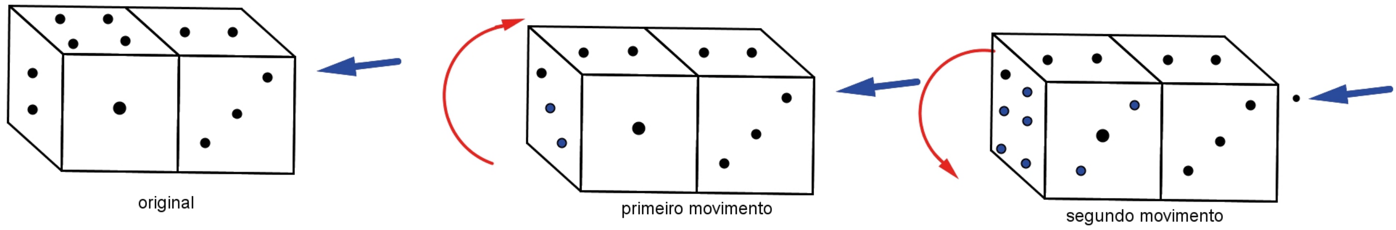
(a) 1 ou 6
(b) 1, 4 ou 6
(c) 1, 4,5 ou 6
(d) somente 1
(e) somente 6
(f) somente 5



O investigador tinha como hipótese que os participantes utilizariam os movimentos de rotação no espaço a partir de uma representação plana de um objeto espacial. Dessa forma, intuitivamente, poderiam explorar tais movimentos por meio de habilidades visuais, uma vez que a investigação foi feita com indivíduos a partir do segundo segmento do Ensino Fundamental, quando o conteúdo de Geometria Espacial já foi iniciado. Desde o primeiro segmento desse nível, os estudantes lidam com formas geométricas espaciais utilizando recursos materiais e chegam às unidades de capacidade, por exemplo.

Na figura 5, ilustram-se os dois movimentos necessários para obter a solução.

Figura 5 – Giros realizados no primeiro dado.



Fonte: dados do autor.

Observa-se que, a partir da figura original, faz-se um giro (rotação vertical no espaço, de 90º) no dado da esquerda, no sentindo horário indicado pela flecha, fazendo com que a face contendo duas bolinhas passe para a face superior. Com isso, a face contendo 4 bolinhas passa para o lado direito e sua face oposta, com 3 bolinhas, vem para o lado esquerdo [primeiro movimento na figura central].

Como a face com 3 bolinhas necessita vir para a frente, para que os dois dados fiquem na mesma disposição, sem alterar a face com 2 bolinhas na face superior, faz-se necessário outro giro [rotação horizontal no espaço, de 90º] no dado da esquerda. Isso faz com que a face oposta a que tem 1 bolinha, ou seja, a que tem 6 bolinhas, venha para a face lateral esquerda e, consequentemente, sua oposta, aquela com 1 bolinha, vá para a face lateral direita e os dois dados ficam na mesma disposição. Portanto, a resposta esperada para a solução do problema se encontra na alternativa (d).

A questão foi aplicada a 137 alunos, de vários níveis de ensino, escolhidos por conveniência, em aulas de Matemática, cujos(as) professores(as) concordaram em colaborar com o pesquisador autor deste capítulo.

As respostas, escritas na mesma folha em que foi proposta a questão, foram recolhidas pelos(as) professores(as) responsáveis e entregues ao pesquisador, que tabulou os dados aqui apresentados, para analisá-los conforme os pressupostos teóricos acima apresentados.

4. APRESENTAÇÃO DOS DADOS

A questão foi inicialmente aplicada em duas turmas de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de uma cidade gaúcha. Na primeira turma, designada por EF_A, houve 13 alunos respondentes. A fim de evitar sua identificação, estes foram nomeados por $EF_A(1)$; $EF_A(2)$; ... ; $EF_A(13)$. O primeiro aluno a concluir respondeu em 12 minutos e o último, em 20 minutos. No quadro 1, indica-se o número de respostas para cada alternativa da questão, com o respectivo percentual:

Quadro 1 – Distribuição das alternativas assinaladas pelos alunos da turma EF_A

Alternativa	N.	%
(a) 1 ou 6	0	0,0
(b) 1, 4 ou 6	0	0,0
(c) 1, 4, 5 ou 6	2	15,4
(d) somente 1	1	7,7
(e) somente 6	3	23,1
(f) somente 5	7	53,8
Total	**13**	**100,0**

Fonte: dados da pesquisa.

Na segunda turma, designada por EF_B, responderam à questão 20 estudantes, sendo que o primeiro a concluir utilizou 7 minutos e o último, 20 minutos. Os alunos foram identificados por $EF_B(1)$; $EF_B(2)$; ... ; $EF_B(20)$. No quadro 2, indica-se o número de respostas para cada alternativa da questão, com o respectivo percentual:

Quadro 2 – Distribuição das alternativas assinaladas pelos alunos da turma EF_B.

Alternativa	N.	%
(a) 1 ou 6	2	10,0
(b) 1, 4 ou 6	1	5,0
(c) 1, 4, 5 ou 6	2	10,0
(d) somente 1	3	15,0
(e) somente 6	2	10,0
(f) somente 5	10	50,0
Total	**20**	**100,0**

Fonte: dados da pesquisa.

A questão também foi aplicada em duas turmas de terceiro ano do Ensino Médio, de uma escola pública de outra cidade gaúcha. A primeira turma, designada por EM_A, teve 21 alunos respondentes, identificados por: $EM_A(1)$; $EM_A(2)$; ... ; $EM_A(21)$. O primeiro aluno a concluir levou 2 minutos e o último, 22 minutos. No quadro 3, indica-se o número de respostas para cada alternativa da questão, com o respectivo percentual:

Quadro 3 – Distribuição das alternativas assinaladas pelos alunos da turma EM_A

Alternativa	N.	%
(a) 1 ou 6	6	28,6
(b) 1, 4 ou 6	2	9,5
(c) 1, 4, 5 ou 6	3	14,3
(d) somente 1	6	28,6
(e) somente 6	0	0,0
(f) somente 5	4	19,0
Total	**21**	**100,0**

Fonte: dados da pesquisa.

A segunda turma de terceiro ano do Ensino Médio, denotada por EM_B, teve 22 alunos respondentes e sua identificação é feita por $EM_B(1)$; $EM_B(2)$; ... ; $EM_B(22)$. O primeiro aluno a concluir a resposta levou 5minutos e o último, 43 minutos. No quadro 4, indica-se o número de respostas para cada alternativa da questão, com o respectivo percentual, sendo que, neste caso, houve uma resposta anulada, porque o estudante assinalou mais de uma alternativa:

Quadro 4 – Distribuição das alternativas assinaladas pelos alunos da turma EM_B.

Alternativa	N.	%
(a) 1 ou 6	11	50,0
(b) 1, 4 ou 6	1	4,5
(c) 1, 4, 5 ou 6	0	0,0
(d) somente 1	5	22,7

(e) somente 6	0	0,0
(f) somente 5	4	18,2
Anulada	1	4,5
Total	**22**	**100,0**

Fonte: dados da pesquisa.

Após as respostas de alunos da educação básica, a questão foi aplicada a duas turmas de cursos de Engenharia de uma universidade privada de ensino superior do Rio Grande do Sul. Um grupo, denotado por ES_A, teve 27 alunos respondentes, nomeados por $ES_A(1)$; $ES_A(2)$; ... ; $ES_A(27)$. Os respondentes levaram, em média, 10 minutos para responder à questão. No quadro 5, indica-se o número de respostas para cada alternativa da questão, com o respectivo percentual:

Quadro 5 – Distribuição das alternativas assinaladas pelos alunos da turma ES_A

Alternativa	N.	%
(a) 1 ou 6	11	40,7
(b) 1, 4 ou 6	1	3,7
(c) 1, 4, 5 ou 6	0	0,0
(d) somente 1	8	29,6
(e) somente 6	4	14,8
(f) somente 5	3	11,1
Total	**27**	**100,0**

Fonte: dados da pesquisa.

Na segunda turma, denotada por ES_B, responderam 19 estudantes, nomeados por $ES_B(1)$; $ES_B(2)$; ... ; $ES_B(19)$, que levaram, em média, os mesmos 10 minutos para responder. No quadro 6, indica-se o número de respostas para cada alternativa da questão, com o respectivo percentual:

Quadro 6 – Distribuição das alternativas assinaladas pelos alunos da turma $ES_{B.}$

Alternativa	**N.**	**%**
(a) 1 ou 6	6	31,6
(b) 1, 4 ou 6	1	5,3
(c) 1, 4, 5 ou 6	2	10,5
(d) somente 1	5	26,3
(e) somente 6	2	10,5
(f) somente 5	3	15,8
Total	**19**	**100,0**

Fonte: dados da pesquisa.

Por fim, a questão foi aplicada em uma turma de uma disciplina de Geometria em um curso de Mestrado Profissional de Ensino de Matemática em uma instituição de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, na qual o autor é o professor-pesquisador. Esse grupo é denotado por MP e os 15 estudantes respondentes, por MP(1), MP(2), ...; MP(15). O primeiro a entregar concluiu a resposta em 10 minutos e o último, em 13 minutos. No quadro 7, indica-se o número de respostas para cada alternativa da questão, com o respectivo percentual:

Quadro 7 – Distribuição das alternativas assinaladas pelos alunos da turma MP.

Alternativa	**N.**	**%**
(a) 1 ou 6	9	60,0
(b) 1, 4 ou 6	0	0,0
(c) 1, 4, 5 ou 6	1	6,7
(d) somente 1	4	26,7
(e) somente 6	1	6,7
(f) somente 5	0	0,0
Total	**15**	**100,0**

Fonte: dados da pesquisa.

Para comparar o desempenho dos estudantes desses vários níveis de ensino ao responderem a questão, foi elaborado o quadro 9:

Quadro 9 – Comparativo de percentuais.

Alternativa	**EF_A**	**EF_B**	**EM_A**	**EM_B**	**ES_A**	**ES_B**	**MP**
(a) 1 ou 6	0,0	10,0	28,6	50,0	40,7	31,6	60,0
(b) 1, 4 ou 6	0,0	5,0	9,5	4,5	3,7	5,3	0,0
(c) 1, 4, 5 ou 6	15,4	10,0	14,3	0,0	0,0	10,5	6,7
(d) somente 1	7,7	15,0	28,6	22,7	29,6	26,3	26,7
(e) somente 6	23,1	10,0	0,0	0,0	14,8	10,5	6,7
(f) somente 5	53,8	50,0	19,0	18,2	11,1	15,8	0,0
Anulada	-	-	-	4,5	-	-	-
Total	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**

Fonte: dados da pesquisa.

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

Para analisar as respostas dos participantes, reunindo a alternativa assinalada com a justificativa, elaboramos as seguintes categorias de respostas:

- alternativa correta, com justificativa coerente;
- alternativa correta, sem justificativa;
- alternativa correta, com justificativa incorreta;
- alternativa incorreta.

Essa categorização foi, então, usada para a análise de cada turma envolvida na pesquisa, conforme apresentado a seguir. Por se tratar, nesse caso, de uma análise qualitativa, somente são apresentados os casos em que há alguma justificativa, correta ou incorreta, para a escolha.

5.1. Análise de EF_A

Apenas o aluno EF_A (13) apresentou alternativa correta, com justificativa incorreta: *"eu olhei bem para o quadro e acho que falta somente 1 para o quadro. Está certo".*

5.2. Análise de EF_B

Dos três alunos que assinalaram a alternativa correta, apenas um deles, EF_B (6), ensaiou uma justificativa que pode ser considerada correta, já que se tratava de uma questão de múltipla escolha: *"eu decidi através de cálculos, assim fui eliminando as alternativas até restar uma só".*

Pode-se concluir que, nas duas turmas do Ensino Fundamental, há uma grande dificuldade na comunicação em língua materna, uma vez que não conseguiram argumentar sobre o que fizeram.

5.3. Análise de EM_A

Nesta turma, seis alunos assinalaram a alternativa correta, mas nenhum deles deu uma justificativa coerente. EM_A (1) escreveu: *"sei lá professora".* EM_A (7), EM_A (8), EM_A (12) e EM_A (15) e EM_A (19) justificaram erroneamente, destacando-se a resposta de EM_A (19): *"acredito que o primeiro dado teria os valores nos quais* ´tentei` *usar a lógica, e fiz o somatório do primeiro e do segundo dados na horizontal".* O raciocínio do aluno é falho, à medida que somou, sem razão plausível, $2+1+3+x=7$, o que o conduziu a obter para x o valor 1.

5.4. Análise de EM_B

Cinco alunos assinalaram a alternativa correta; destes, quatro apresentaram justificativas interessantes, no que se refere à imaginação e à criatividade dos respondentes:

EM_B(13): *"pois, como a soma dos* ´lados *opostos` é igual a 7, observei as faces dos dois dados e fiz essa soma, chegando à conclusão de que no lado indicado é o número 1".*

EM_B (5): *"eu fiz assim: contei quatro+dois de cima deu seis e depois dois+um+três da lateral deu seis e daí somei mais um de cada e deu sete".*

A solução apresentada por EM_B (5) é criativa e muito interessante, pois não tendo explorado os movimentos, ele analisou do ponto de vista algébrico visual.

EM_B (2) apresentou justificativa similar à de EM_B (5).

EM_B (10): *"concluindo, os números um e seis podem estar onde a seta aponta, mas girando o primeiro dado na posição em que está o segundo, com o número de bolinhas quatro para trás, o único número possível para estar na posição apontada pela seta é o número um".*

O raciocínio de EM_B (10) é relevante, uma vez que, inicialmente, estabelece a premissa de que poderiam ser os números 1 ou 6. Percebe, visualmente, o movimento de giro (rotação) para definir que somente o 1 satisfaz.

O aluno EM_B (3) apresentou uma justificativa errada: "*pois colocando o 3 para baixo, o 2 ficará na mesma posição do outro, sendo assim o 1 fica ao lado do 2".*

Seu raciocínio dá indícios de compreensão de movimentos de rotação no espaço. Entretanto, não está correto quando afirma que "2 ficará na mesma posição do outro".

A análise feita nessas duas turmas do Ensino Médio permite concluir que houve um avanço em relação ao grupo do Ensino Fundamental, quer no percentual de acertos da questão quer na justificativa da resposta escolhida. Por exemplo, EM_B(3) explora intuitivamente o conceito de rotação e EM_B(10) parece visualizar o movimento esperado. Todavia, verifica-se que, em geral, realizam cálculos para argumentar as respostas.

5.5. Análise de ES_A

Oito estudantes responderam corretamente que a solução estava na letra (d) e a metade deles apresentou justificativa envolvendo movimento ou giro, como se pode observar nos grifos por nós indicados:

ES_A(28): *"**virando** o dado no pensamento e pondo ele na posição do dado da esquerda".*

ES_A(17): *"se a soma das faces opostas é 7, no primeiro dado, a face de cima tem 4 então a de baixo é 3. Quando o dado é **virado** na segunda figura, o 1 se localiza no lado direito".*

Entende-se que esses estudantes estão corroborando o que entendemos por visualização: um construto mental. Os outros dois apresentam justificativas similares, explorando os somatórios em faces opostas.

Quatro alunos assinalaram a alternativa correta, mas com justificativas não convincentes:

ES_A(10): *"o 6 encontra-se na face oposta de 1".*

ES_A(26): *"usando a lógica que o 1 e o 6 estão em lados opostos".*

ES_A (3): "porque como as somas devem dar 7, no lado oposto temos o 6 para ficar 7, do outro lado deve ser 1".

ES_A (4) *faz uma justificativa similar à anterior.*

Entre as respostas erradas, pode-se destacar a justificativa a seguir, a qual é uma tentativa de argumentar em termos de movimentos.

*ES_A(23): atribui valores para o dado da esquerda e **girei** o dado da direita até que ele fique igual ao da esquerda e observei as possibilidades. [grifo do autor]*

5.6. Análise de ES_B

Cinco alunos marcaram a alternativa correta e, desses, apenas um apresentou justificativa incorreta. A seguir, há algumas das justificativas consideradas coerentes:

ES_B (4): *"considerando a soma das faces opostas igual a sete, ficamos com os números 1 e 6 para as faces laterais. Como o dado indicado é idêntico ao primeiro, considerando a ordem das posições das bolinhas 2 e 4, ajeitando o segundo dado, vemos que a face indicada contém uma bolinha".*

Entende-se a expressão "ajeitando", usada por ES_B (4), como um dos movimentos de rotação que fez para seu construto visual mental.

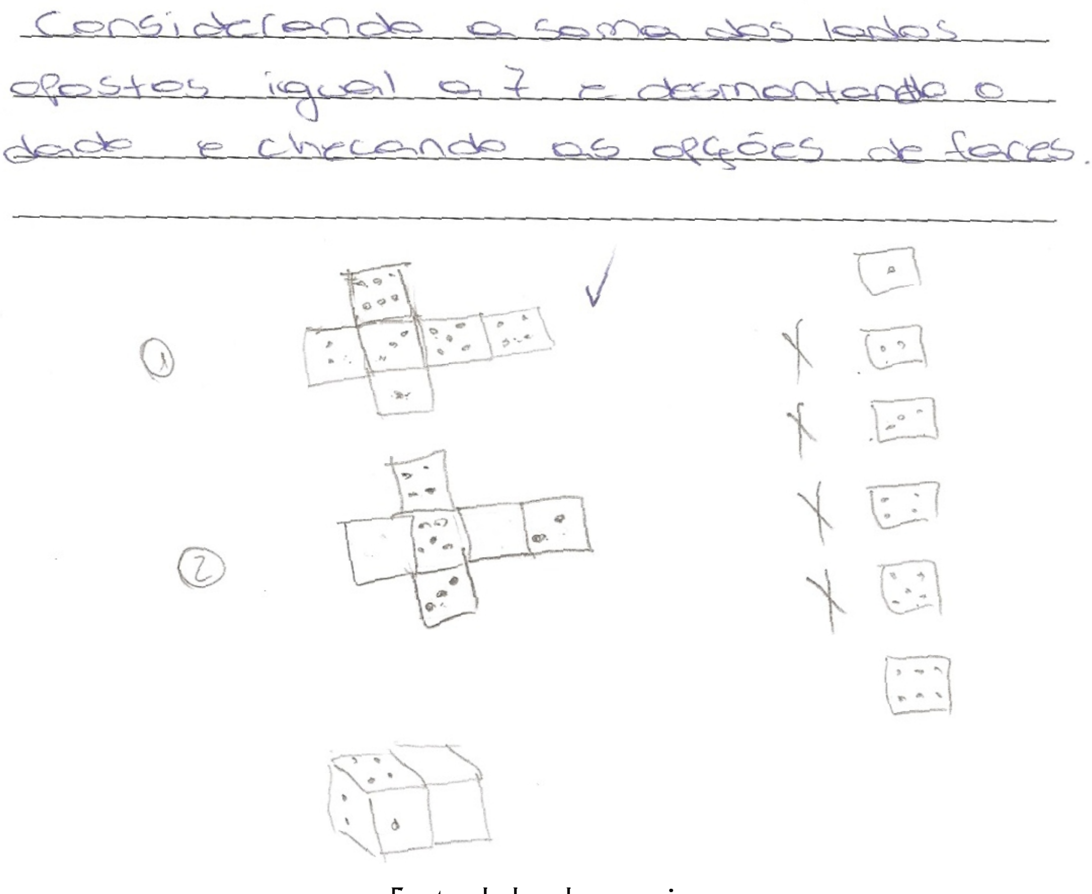
ES_B (5): *"determinei as faces opostas das faces conhecidas e movi o dado da esquerda mentalmente, colocando-o na mesma posição do da direita. Feito isso, concluo que a única possibilidade de número de bolinhas da face em questão é 1".*

ES_B(9): *"se 'movimentarmos' o dado mentalmente, vemos que ali só pode ter o 1, passamos o 2 para cima e o 4 para trás".*

O aluno ES_B(1) assinalou a alternativa correta, mas justificou incorretamente, apontando outro valor: *"supondo que os dados sejam iguais e um está de frente e o outro de ´costas`, há somente um número que pode estar no dado indicado pela seta. Acredito ser o n. 5".*

Ainda que tenha assinalado errado a alternativa, nota-se o empenho do aluno ES_B(17) na tentativa de justificar, na qual planifica os dados para buscar sua resposta a partir de movimentos, conforme a figura 5:

Figura 5 – Tentativa de justificativa do aluno ES_B(17).

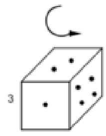
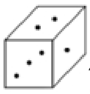


Fonte: dados da pesquisa.

Da análise das respostas dos alunos do Ensino Superior, em especial por serem de Cursos de Engenharia, constata-se haver a busca de amparar as justificativas na lógica, nos construtos mentais, dentre outros. Assim, parece que as habilidades visuais mentais, embora em desacordo com o desejado neste nível e neste curso, podem ser consideradas relevantes.

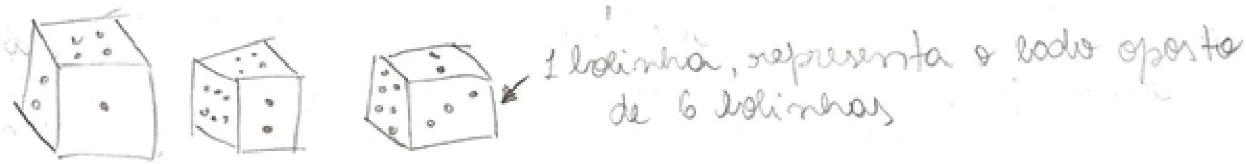
5.7. Análise de MP

Os quatro estudantes que assinalaram corretamente a letra (d) justificaram de forma correta, com maior ou menor grau de aprofundamento teórico:

MP(13): "como os dados são iguais, eu movimentei o dado intuitivamente. Rotacionei o 1º dado (no espaço) 90º para a direita, obtendo  *. Após rotacionei novamente o 1º dado (no plano) para a esquerda obtendo* *, logo somente 1".*[29]

O estudante MP (10) apresenta aspectos visuais interessantes a respeito de movimentos rígidos no plano e no espaço. Utiliza argumento similar à MP (13) em termos de movimentos, porém, usa a expressão "virando o 1º dado". Utiliza representações icônicas do dado, como segue na figura 6, para concluir que o número a ser indicado é o 1.

Figura 6 – Representação icônica do movimento, do aluno MP (10).



Fonte: dados da pesquisa.

MP(7): *"acredito que seja uma bolinha, pensando na posição do segundo dado onde o lado que tem uma bolinha ficaria com as faces visíveis de duas e três bolinhas, fazendo esse giro mental, imaginei que obrigatoriamente seria o lado de uma bolinha. Confesso que fiquei em dúvida entre o lado com seis bolinhas e o lado com uma bolinha".*

Em função da dúvida de MP (7), posteriormente lhe foi questionada a resposta e o aluno reafirma a ideia do giro mental, de modo a poder comparar os dois dados.

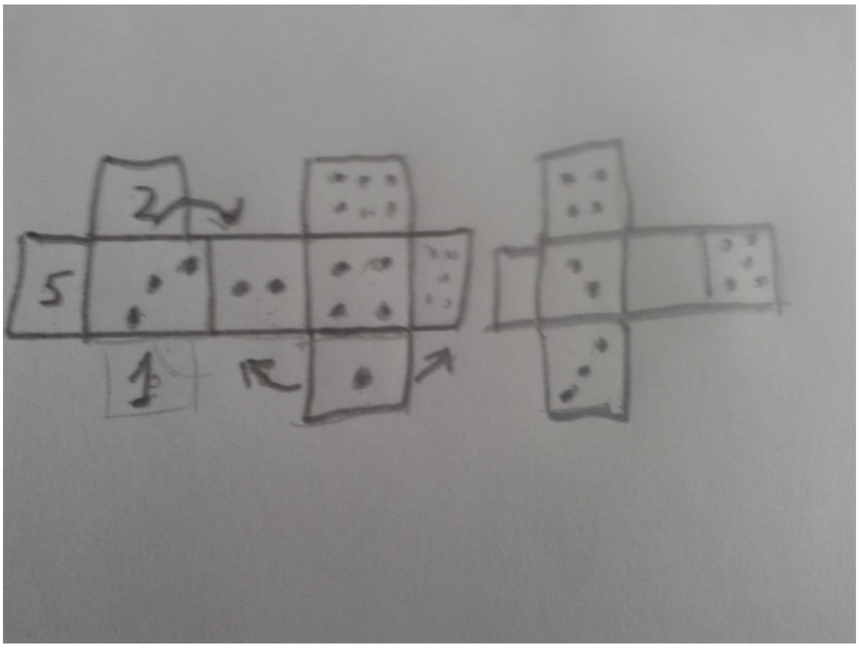
[29] As imagens constantes na escrita de MP(13) foram obtidas no GeoGebra pelo autor.

Por fim, MP(1), que afirma ter comparado com o primeiro dado para visualizá-lo no formato do segundo, não deixando de estar correta sua argumentação, uma vez que aparenta ter visualização como construto mental bem definido.

Os nove alunos que responderam que o número de bolinhas poderia ser 1 ou 6 não levaram em consideração que os dois dados são dispostos de forma idêntica e, portanto, não identificaram a coesão dos movimentos a serem feitos no dado da esquerda para se configurar como o da direita. A justificativa de MP (3) é similar a dos demais: *"como a soma dos lados opostos sempre será 7, já descarto o 4. Da mesma forma, se em cima tem 2 bolinhas, descarto o 5. Logo, poderá ser 1 ou 6, pois a soma será 7".*

Alguns desses respondentes, inclusive, elaboraram uma planificação, mas de forma incorreta, como é o caso de MP(11), conforme se vê na figura 7:

Figura 7 – Planificação dos dados realizada por MP(11).



Fonte: dados da pesquisa.

Em virtude de estarem cursando uma disciplina específica de Geometria, na qual os movimentos rígidos no plano foram trabalhados, era de se esperar que as argumentações fossem mais explícitas, matematicamente. No entanto, não se pode deixar de considerar que o poder argumentativo deste grupo específico se encontra em nível mais ampliado do que nos anteriores, de forma que isso faz sentido.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos, neste capítulo, uma investigação realizada em quatro níveis de escolaridade: Ensino Fundamental, Médio, Superior e Mestrado, com o objetivo de verificar como os estudantes resolviam uma questão de visualização espacial. Em particular, a situação envolvia, em sua resolução, o conteúdo de movimentos rígidos. A questão não exigia nenhum algoritmo, apenas aspectos visuais e intuitivos. Além disso, buscamos também verificar como os estudantes argumentavam suas respostas. Verificamos uma tendência dos alunos em tentarem justificar com pequenos algoritmos, como o da soma dos termos, e até utilizarem linguagem algébrica.

Concluímos, a partir dos dados coletados, que há uma grande dificuldade dos participantes em relação à visualização espacial a partir de representação plana de um objeto espacial, uma vez que, em média, apenas 23,4% deles escolheram a alternativa correta. O baixo índice de respostas corretas e a grande falta de justificativas – ou de justificativas erradas –, é um fator a ser considerado na formação do professor de Geometria. Assim, julgamos ser pertinente incluir, nos currículos dos cursos de formação de professores, atividades que desenvolvam tal habilidade, visto que ela é relevante para os mais variados ramos da Matemática.

Entendemos que construir conhecimento matemático não começa com conceitos, mas sim o contrário: conceitos são resultados de processos cognitivos, os quais podem ser construídos pelo caminho da visualização, em Geometria, corroborando as ideias de Freudenthal (1973, 1991), em que Matemática permite definições explícitas em uma fase mais precoce do que qualquer outro campo do conhecimento.

De acordo com o mesmo autor, pesquisadores já admitem que conceitos são precedidos por algo menos formal, por iniciações, **pré-conceitos**, como eles chamam, o que, a longo prazo, significa que a meta ainda é a construção de conceitos. Neste artigo, buscamos ilustrar como atividades que exploram habilidades visuais podem conduzir à formulação de conceitos, embora mais avançados, até mesmo pelas questões indicadas por Fischbein (1987) a respeito da autoevidência que tais construções permitem intuir. Assim, o ensino e a aprendizagem em Geometria, utilizando a visualização, podem avançar em operações e construtos mentais dos objetos geométricos.

A questão utilizada na investigação, bem como as demais citadas neste capítulo, pode ser aplicada pelo professor de Matemática tanto na educação básica como na superior, de modo que ambas possam servir de incentivo para motivar os estudantes ao estudo da Geometria, tão relegada a segundo plano nos currículos. Por sua vez, considera-se que que essas questões podem desenvolver as habilidades visuais que se julgam ser pertinentes para a construção do conhecimento geométrico em diversos níveis de escolaridade e, portanto, ser um caminho para o ensino e a aprendizagem em Geometria.

Com este trabalho, mostramos necessidade de investir na formação do professor em novas abordagens didáticas para iniciar ou desenvolver conteúdos geométricos que podem, até mesmo em níveis mais avançados, partir de situações simples que facilitem a intuição e a visualização como construção mental para, posteriormente, partir para representações e algoritmos.

REFERÊNCIAS

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking.** New York: Springer, 2005.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogia, Grupo de Educación Matemática, 2004.

FISCHBEIN, E. **Intuition in Science and Mathematics:** an Educational Approach. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1987.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Holland: D. Reidel Publishing Company, 1973.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Boston; Kluwer Academic Publishers, 1991. Mathematical Education Library.

HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S. **Geometry and the imagination**. New York: Chelsea Publishing Company, 1932.

KUZNIAK, A. L'espace de travail mathématique et ses génèses. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,** v. 16, p. 9-24, 2011.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LEIVAS, J. C. P.; SCHERER, S. Construindo o conceito de alturas de triângulo com o Cabri-Géomètre II: verticalidade ou perpendicularidade? **Boletim GEPEM**, v. 56 , p. 117-133, jan./jun. 2010.

MAMMANA, C.; VILLANI, V. **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century:** an ICMI Study. Dordrecht, NL: Kluwer, 1998. p. 37-51.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1973.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. **Visualization in teaching and learning mathematics**: a project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of The Mathematical Association of America. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1991.

CAPÍTULO 7

O CONHECIMENTO SOBRE PERÍMETRO E ÁREA DE FIGURAS PLANAS: UM ESTUDO COM PROFESSORES EM FORMAÇÃO

Eleni Bisognin
Vanilde Bisognin

1. INTRODUÇÃO

O trabalho com formação de professores em cursos de pós-graduação em Educação Matemática propicia a emergência de dificuldades que não são, em geral, discutidas nas aulas da graduação em Matemática. Os licenciados cursam disciplinas como Análise, Álgebra e Geometria, mas nelas não há, em geral, resgate de conteúdos da educação básica que vão ser trabalhados logo em seguida, quando esses professores em formação ingressarem no mercado de trabalho e assumirem turmas de Ensino Fundamental ou Médio.

Em geral, dificuldades relacionadas a conceitos matemáticos podem levar esses docentes recém-graduados a gerarem obstáculos à aprendizagem de seus alunos, pois estes vão formar imagens desses conceitos[30] que não correspondem ao que é aceito como definição do conceito pela comunidade matemática.

É interessante entender como os professores de Matemática resolvem problemas que envolvem conceitos matemáticos elementares, como os de perímetro e área; dessa forma, aplicar questões de Matemática básica para professores em formação continuada é uma maneira de entender suas dificuldades e poder contribuir para a formação de seu conhecimento para o ensino.

Assim, com o objetivo de avaliar o conhecimento comum e o conhecimento especializado (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) do conteúdo "perímetro e área de figuras planas", planejamos a investigação qualitativa relatada neste texto.

[30] Aqui, estamos fazendo referência às ideias sobre imagem de conceito e definição de conceito, apresentadas em Tall e Vinner (1981).

2. ALGUNS PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

O conhecimento matemático para o ensino (*mathematical knowledge for teaching –MKT*) foi definido por Ball, Thames e Phelps (2008) como "o conhecimento necessário para levar adiante o trabalho de ensinar matemática" (p. 395). Em vários textos escritos com diversos colaboradores, Ball tem apresentado suas ideias sobre o assunto e investigado as categorias desse conhecimento.

Em 2008, Ball, Thames e Phelps sintetizaram vários conceitos já esboçados em textos anteriores da equipe e apresentaram uma subdivisão das categorias de conhecimento matemático para o ensino. Para eles, o conhecimento do conteúdo da matéria pode ser subdividido em conhecimento comum do conteúdo (*common content knowledge* – CCK) e conhecimento especializado do conteúdo (*specialized content knowledge* – SCK). O primeiro tipo é definido como o conhecimento matemático e as habilidades necessárias para o ensino, mas que não são exclusivas do professor de Matemática. O segundo é formado por conhecimentos que não têm outro propósito além do ensino.

Já o conhecimento pedagógico do conteúdo pode ser subdividido em conhecimento do conteúdo e dos estudantes (*knowledge of content and students* – KCS) e conhecimento do conteúdo e do ensino (*knowledge of content and teaching* – KCT), de modo que se expressam os conhecimentos da Matemática alinhados com o que se sabe sobre os estudantes e sobre o próprio ensino.

Vários autores têm se dedicado ao estudo desses constructos apresentados por Ball e colaboradores (PENG; LUO, 2009; BALL; FORZANI, 2010, entre outros). Especificamente relacionados ao conhecimento comum e ao conhecimento especializado do conteúdo, temos, por exemplo, os artigos de Moru et al. (2014) e de Speer, King e Howell (2015).

Moru et al. (2014) consideram que os professores, em geral, identificam os erros de seus alunos e os interpretam de uma única perspectiva, mas que o desejado seria fornecer múltiplas interpretações. Os autores planejaram uma investigação para responder à seguinte questão: que conhecimentos de análise de erros possuem os professores? Para isso, aplicaram um teste a alunos de Cálculo Diferencial e submeteram as resposta a dois professores da disciplina.

Moru et al. (2014) concluíram que a interpretação desses docentes foi feita sob uma única perspectiva e sua análise foi "opaca", visto que não levaram em conta erros que surgiam em etapas intermediárias das soluções. Mostraram ter elementos do conhecimento especializado, pois identificaram os erros sem dificuldade, mas não aprofundaram a análise sob múltiplas perspectivas, deixando de enfatizar, por exemplo, os aspectos geométricos das soluções. Dessa forma, podem não ser capazes de planejar atividades para remediar os erros.

Speer, King e Howell (2015) comentam o fato de que muitos pesquisadores têm se debruçado sobre o conhecimento do professor da escola elementar, todavia que é válido questionar o que acontece com professores do ensino secundário ou superior. Esses autores consideram que

> há razões para acreditar que esses constructos [MKT, SCK] se aplicam a professores de todos os níveis – afinal, o trabalho intelectual requerido é similar, as tarefas de ensino são similares e, assim, é razoável presumir que os processos cognitivos vão funcionar de maneira semelhante. Por outro lado, as abordagens de ensino variam através dos níveis e as práticas dos professores podem ser mais variadas em níveis superiores do que na escola elementar. (p. 109-110).

Uma primeira questão, que surgiu a partir dos resultados da pesquisa de Speer, King e Howell (2015), refere-se ao significado de conhecimento comum e conhecimento especializado para professores que têm uma formação matemática de nível superior. Por exemplo, reconhecer que a definição de um conceito está bem formulada pode ser parte do conhecimento especializado de um professor de escola básica, mas pode ser parte do conhecimento comum de um professor de ensino superior.

Uma segunda questão proposta por Speer, King e Howell (2015) refere-se à relação entre o tipo de trabalho feito por um matemático em suas pesquisas e o que é feito quando ensina Matemática. Se a distinção entre CCK e SCK é clara na escola básica, porque o trabalho de ensinar vai além de saber Matemática para o dia a dia, já fica menos clara quando se considera o trabalho cotidiano de um matemático.

Se for considerada a tarefa de examinar as respostas de alunos a um problema, que exige e desenvolve o conhecimento especializado, o que podemos dizer da atividade de um matemático em seu dia a dia? Não está ele constantemente avaliando soluções de seus pares e revisando artigos? Dessa forma, para um matemático, o conhecimento comum e o especializado se confundem em muitos aspectos. Até que ponto o conhecimento comum de um determinado conteúdo se confunde com o especializado, para um professor de Ensino Médio ou Superior?

Speer, King e Howell (2015) concluem seu artigo sugerindo que sejam desenvolvidas novas pesquisas com professores desses níveis superiores de ensino, de modo a ter clara a distinção entre os tipos de conhecimento esperados e efetivamente assumidos por eles.

Steele (2013) comenta que foi evidenciado, em avaliações nacionais e internacionais, algum progresso dos alunos americanos em relação ao conhecimento matemático, mas que esse ganho pouco aparece quando se considera conhecimentos sobre Geometria e medidas. Dessa forma, ele considera que os professores também tiveram poucas oportunidades de aprender sobre o mesmo assunto. Para medir o conhecimento de professores para ensinar Geometria e medidas, Steele (2013) planejou um conjunto de atividades focadas nas relações entre medidas de figuras planas e seu perímetro e área; tais atividades, segundo o pesquisador, medem aspectos da relação entre conhecimento comum e conhecimento especializado dos conteúdos envolvidos.

Após analisar detalhadamente as respostas a cada atividade, Steele (2013) conclui que os resultados de sua pesquisa ilustram importantes conexões entre os dois tipos de conhecimento, o que não tinha sido detectado, até então, em outras investigações. Visto ter trabalhado com professores do nível correspondente ao Ensino Médio brasileiro, o autor partiu do pressuposto de que esses professores tinham conhecimento aprofundado do conteúdo envolvido. No entanto, os resultados de algumas tarefas que envolviam ambos os tipos de conhecimento mostraram que as conexões entre estes nem sempre são fortes. Assim, o autor sugere que essas tarefas sejam usadas “como fundamento para futuras pesquisas, para construir um conjunto de medidas coeso e uma base robusta de experiências sobre o conhecimento matemático para o ensino, de professores secundários” (STEELE, 2013, p. 266).

3. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Com base nos pressupostos acima explanados, desenvolvemos, então, a investigação aqui relatada. Quatro das questões abertas do teste usado por Steele (2013) foram traduzidas e adaptadas. A seguir, essas questões foram aplicadas a um grupo de 21 professores participantes de um curso de formação continuada de uma Instituição de Ensino Superior do Rio Grande do Sul. Para evitar a identificação, os 21 participantes foram indicados pela letra P, seguida de um número, de 1 a 16, e usamos o gênero masculino para mencionar qualquer um deles.

Após a aplicação, as respostas foram analisadas e categorizadas, com base em adaptações das indicações de Steele (2013).

A primeira questão aborda o conhecimento comum do conteúdo e seu enunciado é:

Tangram é um conjunto especial de sete peças geométricas mostradas na figura 1 abaixo. As figuras 2 e 3 foram construídas usando todas as peças do Tangram.

a) qual figura, 2 ou 3, tem a maior área? Justifique;

b) qual figura, 2 ou 3, tem o maior perímetro? Justifique.

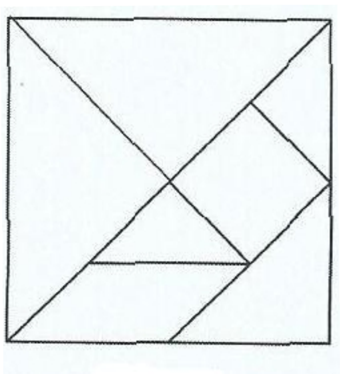
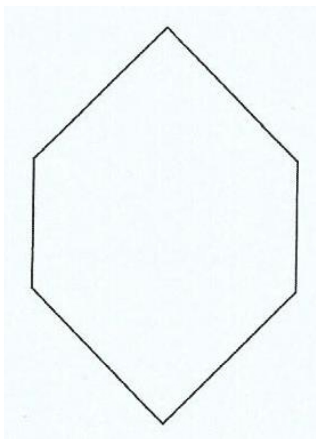
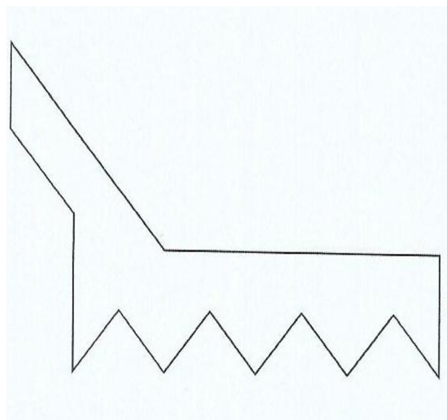
		

Figura 1	*Figura 2*	*Figura 3*

Como resposta, espera-se que o professor mostre conhecimento de que tomar uma figura plana em várias partes e rearranjá-las pode modificar o perímetro, mas não a área da figura. É uma aplicação do Postulado da Adição de

Áreas[31]. Portanto, as duas figuras têm mesma área, entretanto a figura 3 tem maior perímetro.

Segundo Steele (2013), o professor pode responder corretamente a questão de três maneiras: 1) estimar visualmente a área e o perímetro; 2) usar um instrumento de medida (formal ou não formal) para determinar o perímetro e a área de cada peça e fazer a comparação; 3) apresentar argumentos formais (definições, propriedades). O autor estabeleceu uma pontuação para as respostas em cada item, que adaptamos segundo critérios já empregados em outra pesquisa (CURY; RIBEIRO; MÜLLER, 2011). Em qualquer questão, a ausência de resposta é categorizada como "**em branco**".

No item **a**, consideramos **correta** a resposta em que o professor afirma haver a mesma área e justifica usando, resumidamente ou não, o postulado da adição de áreas ou argumentando que foram usadas todas as peças. É **parcialmente correta** a resposta em que o professor justifica por meio de uma afirmativa qualitativa, baseada na visualização, ou não oferece justificativa. É **incorreta** a resposta em que o professor considera que uma das figuras tem área maior.

Dos 21 respondentes, 17 deram respostas **corretas**, afirmando que as áreas são iguais, porque são formadas por todas as peças do Tangram. Chama a atenção a afirmativa de P16, que escreveu "as peças, mesmo que não dito, estão justapostas", pois, efetivamente, sem essa afirmativa não se pode julgar que a área é a mesma, como afirma o postulado da adição de áreas. Resposta **parcialmente correta** é a de P6, que afirmou serem iguais às áreas, mas não justificou. Três dos professores apresentaram respostas **incorretas**: P11 e P13 consideraram que a figura 2 tem área maior, porque a disposição das peças ocupa mais espaço; P12 também considerou que a maior área é a da figura 2, justificando que "se formos calcular a área do hexágono ela apresentará um valor maior".

No item **b**, é **correta** a resposta em que o professor explica que o rearranjo das peças expôs maior número de lados, aumentando o perímetro, ou usa uma unidade de medida para fazer a comparação. É **parcialmente correta** a resposta em que o professor usa observação qualitativa, baseada em visualização, ou informa que a figura 3 tem maior perímetro, mas não justifica. É **incorreta** a afirmativa de que a figura 3 tem menor perímetro ou aquela em que o professor considera que a figura 3 tem maior perímetro, porém sua justificativa é errada.

[31] Segundo Moise e Downs (1971, p. 273), este postulado tem o seguinte enunciado: Supondo que a região R é a união de duas regiões, R1 e R2 e que R1 e R2 se interceptam no máximo em um número finito de segmentos e pontos, então a área de R é a soma das áreas de R1 e R2.

Seis professores responderam **corretamente** que a figura 3 tem maior perímetro, justificando por meio de explicações sobre medidas dos lados; P17, inclusive, mediu os perímetros com uma régua e indicou os valores. Doze respostas são **parcialmente corretas**, sendo que quatro professores indicaram que a figura 3 tem maior perímetro, mas não justificaram e oito usaram justificativas visuais. Por exemplo, P9 afirmou que a figura 3 tem "mais curvas", P11 disse que tem "contorno maior", P13 afirmou que tem "mais extremidades", P20 considerou que o fato é devido "à maneira como as peças estão colocadas".

Três respostas são **incorretas**: P8 não decidiu qual figura tem maior perímetro, pois escreveu que "o perímetro pode variar; só sem as medidas fica difícil de calcular"; P14 considerou que a figura 3 tem maior perímetro, todavia justificou que "a figura 2 tem 6 lados e a figura 3 tem 14 lados e os lados de cada figura são de tamanhos diferentes"; P18 também não conseguiu decidir, uma vez que escreveu: "os perímetros podem ser diferentes, pois as peças estão organizadas em posições diferentes em cada figura e o perímetro considera apenas o contorno da figura toda".

A segunda questão tem o seguinte enunciado: *Verdadeiro ou falso? Um paralelogramo com uma base de 6 cm e uma área de 24 cm² terá sempre o mesmo perímetro. Apresente pelo menos um exemplo para justificar sua resposta.*

Como resposta, espera-se que o professor considere a afirmativa falsa e justifique por meio de exemplos (figuras) ou de uma generalização que explique a razão de ser falsa.

Novamente, aproveitamos a pontuação de Steele (2013) para avaliar as respostas, adaptada segundo critérios já empregados na análise da primeira questão. Assim, é **correta** a resposta em que o professor considera a afirmativa falsa e apresenta pelo menos um exemplo que a justifica. É **parcialmente correta** a resposta em que o professor também considera a afirmativa falsa, mas não a justifica, ou justifica apenas com desenhos sem explicações. Finalmente, é **incorreta** a resposta em que o professor considera a afirmativa verdadeira, ou a considera falsa, porém justifica de maneira errada.

Ao analisarmos as respostas dos 21 participantes, encontramos apenas três respostas **corretas**, de professores que consideraram a afirmativa falsa e justificaram apresentando um desenho de um retângulo e de um paralelogramo, com medidas das bases e das alturas respectivamente iguais, mas cujos perímetros são diferentes, mostrando, inclusive, cálculos com as medidas que usaram nos exemplos.

Somente um professor apresentou uma resposta **parcialmente correta**, uma vez que considerou a afirmativa falsa, todavia desenhou um retângulo e um paralelogramo apenas, sem explicar mais nada.

Dezesseis participantes apresentaram respostas **incorretas**. Onze deles julgaram ser a afirmativa verdadeira e os outros cinco, apesar de considerarem a afirmativa falsa, apresentaram justificativas inadequadas: P1 apresentou dois desenhos, de paralelogramos, mas a medida da altura de um deles é 3, o que é impossível, face aos dados; P4 desenhou um paralelogramo e um retângulo, porém usou, como fórmula da área de um paralelogramo, a relação $A = \frac{b \times h}{2}$; P6 escreveu que "para um dado valor de área podemos associar diferentes valores de perímetro de retângulos" e deu como exemplo a primeira questão. No entanto, não se tratava apenas de retângulos e a primeira questão tinha figuras de várias formas (as peças do Tangram); P13 desenhou primeiramente um paralelogramo, indicou a base com 6 cm e um dos lados oblíquos com 4 cm. Além disso, desenhou ainda vários outros paralelogramos e usou, como medidas da base e do lado oblíquo, os divisores de 24; P19 desenhou um retângulo, indicou as medidas da base e da altura como sendo, respectivamente, 6 e 4, mas depois desenhou um quadrado e dentro dele escreveu "6^2". Um professor deixou a questão **em branco**.

Nessa questão, avalia-se o conhecimento comum do conteúdo, em relação a uma concepção errônea bastante frequente (STEELE, 2013) de que uma área fixa implica um perímetro fixo ou que a mudança na área implica mudança no perímetro. Também se avalia o conhecimento especializado do conteúdo, à medida que o professor encontra exemplos que sustentem seu julgamento.

A terceira questão tem o seguinte enunciado: *Júlia quer cercar uma área no seu quintal, para seu cão. Depois de pagar pelo material para construir a casa do cachorro, ela só dispõe de 36 m de cerca. Ela está considerando várias formas diferentes para cercar a área. Porém, quer que todas as formas tenham 4 lados cujas medidas sejam números inteiros e que contenham 4 ângulos retos. Todos os quatro lados devem ser cercados. Qual é a maior área que Júlia pode cercar com 36 m de cerca? Justifique sua resposta mostrando a construção que convencerá Júlia de ser a de maior área.*

Esta questão exige que o respondente avalie uma situação em que o perímetro é fixo e a área variável. Pode ser resolvida por estratégias do Cálculo Diferencial (é um problema de máximo e mínimo, em que são usadas as derivadas de primeira e segunda ordem da função área), que envolvem representações simbólicas ou por meio de uma representação gráfica da função quadrática com domínio no conjunto dos divisores de 36, obtida pela substituição dos dados na fórmula da área, chegando ao valor máximo da função área ou, ainda, por meio de uma tabela de dupla entrada, em que são inseridos valores inteiros positivos de comprimento, largura, perímetro e área, para analisar quais medidas geram a maior área. Assim, avalia conhecimento comum do conteúdo e, também, conhecimento especializado, à medida que o professor precisa conhecer as relações entre as medidas e a forma como pode representá-las.

Nessa questão, é considerada **correta** a resposta em que o professor conclui que a maior área é a de um quadrado cuja medida do lado é 9 m e obtém esse resultado expressando a área como produto de comprimento vezes largura e, a seguir, por meio de derivadas ou por meio de uma equação quadrática, obtém o ponto de máximo da função. Também é aceita como correta a resposta em que o professor apenas esquece algum detalhe no final do procedimento de obtenção da derivada de segunda ordem ou de determinação do valor máximo da função quadrática.

A resposta é **parcialmente correta** quando o professor obtém um quadrado cujo lado mede 9 m, mas suas justificativas não são adequadas ou ele faz apenas tentativas, usando alguns valores inteiros, em uma tabela ou diretamente nas figuras desenhadas, sem descrever “os princípios gerais que explicam como a mudança em uma quantidade impacta as mudanças na outra” (STEELE, 2013, p. 258).

Qualquer outra resposta é considerada **incorreta**, inclusive quando há algum erro conceitual ou procedimental na solução, ainda que o resultado apareça como “quadrado com lado 9 m”, ou quando não há desenvolvimento da resposta.

Analisando as 21 respostas dos professores, notamos que apenas três estão **corretas**: P5 e P6 desenvolveram a solução usando o gráfico da função quadrática e seu ponto de máximo e P2 usou derivadas.

Oito respostas são **parcialmente corretas**, sendo que, em cinco delas, houve teste de valores inteiros para os lados, mostrando-os nos desenhos, com a conclusão de que o valor máximo da área é 81m^2, obtido quando a figura é um quadrado de lado 9m. Os outros três professores construíram uma tabela com valores inteiros para os lados, até obter a área máxima de 8m^2, não seguindo uma ordem na escolha dessas medidas.

Dez professores apresentaram respostas **incorretas**: P1 expressou a área como *A=x.y*, encontrou y=18-x e daí derivou *y* em relação a *x*, obtendo *y´=18-1*. O professor P8 explica que dividiu 36 por 4 para ter ideia do número do qual deveria partir e então fez tentativas até obter a área máxima de $81m^2$. No entanto, para um licenciado em Matemática, consideramos que houve erro procedimental, pois P8 "armou" a conta de divisão de 36 por 4 e obteve quociente 8 e resto 4. P9, P10, P11, P15 e P20 apenas apresentaram a resposta, sem justificativas. P12 também apresentou um resultado sem justificativa, mas, talvez por distração, calculou a medida do lado do quadrado com base em um perímetro de 32m. P17 considerou apenas duas possibilidades de resposta, um quadrado de lado 9m ou um retângulo de lados 6m e 12m, sem que ficasse clara a razão pela qual escolheu essas últimas medidas. P19 considerou, também, que poderia partir de duas possibilidades, um quadrado de lado 9m ou um retângulo de medidas *x* e *y*; expressou a área como x.y, obteve a função quadrática $A=18y-y^2$, mas esboçou o gráfico de uma parábola com vértice na origem e concavidade para cima, além de ter obtido valores para y (0 e 18) ao igualar a zero, evidenciando erros conceituais e procedimentais.

A quarta questão tem o seguinte enunciado: *A turma do 7º ano quer começar um pequeno jardim orgânico para cultivar vegetais para a cantina da escola. O diretor disse que eles podiam ocupar uma área retangular de 36m², atrás da escola. O retângulo poderia ser do formato que quisessem, mas deveria ter os 36m² de área.*

a) Encontre a menor quantidade de cerca para cercar um jardim retangular de 36m² de área. Organize a informação em um quadro como o abaixo:

Comprimento (m)	*Largura (m)*	*Perímetro (m)*	*Área (m²)*

b) O diretor decidiu que a turma de 6º ano também pode começar um pequeno jardim e lhes deu uma área de 24m² para cultivar o jardim, em qualquer formato retangular que quisessem. Encontre a menor quantidade de cerca para cercar um jardim de 24m² de área. Faça um quadro semelhante ao que foi criado acima.

c) Quando souberam do sucesso dos colegas, os alunos do ensino médio também quiseram criar seus próprios jardins. O diretor lhes deu *uma área de 100m². Faça uma suposição sobre o mínimo de cerca necessária para essa área de 100m² e justifique sua resposta.*

Esta questão, além de avaliar conhecimento comum do conteúdo, explorando agora uma situação em que a área é fixa e o perímetro variável, mostra uma possível estratégia de ensino desse conteúdo na educação básica. Assim, o respondente é levado a organizar tabelas com valores de comprimento, largura, perímetro e justificar suas respostas, sendo que, no item c, deverá expor uma suposição baseada nas respostas anteriores. Dessa forma, também avalia o conhecimento especializado do conteúdo, pelas justificativas apresentadas.

Comparando com a questão anterior, esta exige um conhecimento mais aprofundado, visto que o enunciado não menciona valores inteiros para os lados. Portanto, ainda que o professor consiga resolver o item *a* apenas com o uso da tabela, em que pode testar possíveis respostas usando os divisores de 36 como medidas dos lados, no item *b,* ele vai precisar de outra estratégia, visto que o quadrado, que foi resposta para o caso da área de 36m², neste caso, tem como medida do lado um valor irracional. Então a questão avalia o conhecimento do professor sobre a relação entre medidas dos lados, perímetro e área, que, no item *b*, gera a função racional $P(x) = 2x + \frac{48}{x}$, com domínio em $\mathbb{R}^*$. Em termos de conhecimento especializado do conteúdo, sendo dito na questão que os dois primeiros itens são propostas para alunos de 6º ou 7º ano, podemos considerar que o professor não deveria tentar usar procedimentos do Cálculo Diferencial, os quais não são ensinados nesses anos do Ensino Fundamental.

Assim, no item *a*, é considerada **correta** a resposta em que o professor conclui que o menor perímetro é o de um quadrado cuja medida do lado é 6m e obtém esse resultado expressando a área como produto de comprimento vezes largura e, a seguir, por meio dos dados da tabela, encontra o valor mínimo da função perímetro. É também aceita como correta a resposta em que o professor não usa, na tabela, todos os divisores de 36.

É considerada **parcialmente correta** a resposta em que o professor conclui que o quadrado de lado 6m tem o menor perímetro (ou seja, que este menor perímetro vale 24m), mas suas justificativas não são adequadas, porque resolve por meio de derivadas quando se espera que leia com atenção e preencha a tabela ou porque as justificativas têm erros conceituais. Qualquer outra resposta é considerada **incorreta**.

No item **b**, é **correta** a resposta em que o professor preenche a tabela com medidas dos lados que são divisores de 24, mas se dá conta de que poderá haver um valor menor do que 20m para o perímetro, visto que não obteve quadrado com os valores inteiros dos lados.

É **parcialmente correta** a resposta em que o professor resolve por meio de derivadas ou quando, mesmo preenchendo a tabela com divisores de 24, apenas aponta o retângulo cujas medidas dos lados são 4m e 6m, não considerando a possibilidade de haver um quadrado com medidas não inteiras dos lados. Qualquer outra resposta é considerada **incorreta.**

No item c, é **correta** a resposta em que o professor faz a suposição de que o mínimo de comprimento de cerca é 40m, porque generaliza os resultados anteriores. É **parcialmente correta** quando o professor precisa fazer todo o procedimento novamente, por meio de derivadas ou tabela, para obter o perímetro mínimo, pois se esperaria que soubesse que, para uma área fixa, produto de dois fatores, obtém-se o menor perímetro quando ambos os fatores são iguais. Qualquer outra resposta é considerada **incorreta.**

No item **a** desta questão 4, analisando as 21 respostas dos professores, vemos que 10 são **corretas**. Dessas, as de P3, P9, P10, P11, P13, P15 e P18 usam poucos valores na tabela. Três respostas são **parcialmente corretas:** P2, P5 e P6 resolveram a questão por derivadas, sendo que P6 não usou a derivada de segunda ordem, apenas obteve o valor 6 para o lado pela primeira derivada. Sete respostas são **incorretas:** P4, P14 e P21, apesar de terem obtido o valor mínimo do perímetro para um quadrado cuja medida do lado é igual a 6m, parecem não aceitar que o quadrado seja um retângulo. P7 fez um cálculo errado para o perímetro do quadrado de lado 6m e daí apontou um retângulo como resposta. P8 só completou a tabela para comprimento e largura iguais a 6m; para os outros valores, indicou diretamente nos desenhos das figuras, mas considerou as figuras cujo perímetro é igual a 24m e daí determinou as áreas, para ver se valiam 36m^2. Considerou finalmente que "6 x 6 seria um quadrado, mas o quadrado é uma figura particular do retângulo". P12 indicou 12m como comprimento, 3m como largura e calculou o perímetro de 30m, não levando em conta quaisquer outros valores. P16 apenas escreveu: "A quantidade de cerca utilizada para uma área de 36m^2 seria o comprimento 9m, largura 4m, o perímetro 9+9+4+4=26m".

No item b, não houve respostas **corretas**. Dezessete são **parcialmente corretas**. Dessas, doze apenas apontam o retângulo cujas medidas dos lados são 4m e 6m, não considerando a possibilidade de haver um quadrado com medidas não inteiras dos lados. P2, P5 e P6 resolvem por meio de derivadas, sendo que P6 não usou a derivada de segunda ordem. P9 e P10 apontaram o quadrado de lado $2\sqrt{6}$ m, mas não justificaram a resposta. Duas respostas são **incorretas**: P3 desenhou dois retângulos e indicou as medidas dos lados (em um deles, 4m e 6m, no outro, 2m e 12m), mas então desenhou um quadrado e indicou ter lado 4,9m, não explicando como obteve este valor. P12 apenas indicou dois valores, respectivamente para comprimento (12m) e largura (2m), com um perímetro de 28m. Duas respostas estão **em branco**.

No item c, catorze respostas são **corretas**, tendo os professores generalizado a partir das respostas dadas nos itens anteriores, inclusive nos casos em que erraram esses anteriores. Acreditamos que já sabiam qual seria a resposta e se atrapalharam nas explicações nos outros itens. Três respostas são **parcialmente corretas**, tendo esses respondentes realizado todos os procedimentos novamente, mostrando não ter entendido que deveriam fazer uma suposição e generalizar a partir dos anteriores. Uma resposta, a de P12, foi considerada **incorreta**, pois, da mesma forma que no item anterior, apenas indicou dois valores, respectivamente para comprimento (25m) e largura (4m), com um perímetro de 58m Três respostas estão **em branco**.

Nessa questão, enfatizamos os erros cometidos por alguns professores que mostram não saber que o retângulo que tem menor perímetro, dada uma área fixa, é o quadrado. Inclusive notamos que alguns respondentes não aceitam que o quadrado seja um retângulo. Esses problemas indicam que, não tendo o conhecimento comum desse conteúdo, esses docentes não têm também as habilidades de planejar uma tarefa que explore essas relações entre comprimento, perímetro e área, ao trabalhar na educação básica.

Podemos sintetizar quantitativamente as respostas dos 21 professores, em cada questão, conforme o quadro 1:

Quadro 1 – Distribuição das categorias de respostas por questão.

Respostas	Questões													
	1a		1b		2		3		4a		4b		4c	
	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%
Corretas	17	81	6	29	3	14	3	14	10	48	0	0	14	67
Parcialmente corretas	1	5	12	57	1	5	8	38	3	14	17	81	3	14
Incorretas	3	14	3	14	16	76	10	48	7	33	2	10	1	5
Em Branco	0	0	0	0	1	5	0	0	1	5	2	10	3	14
Total	**21**	**100**	**21**	**100**	**21**	**100**	**21**	**100**	**21**	**100**	**21**	**100**	**21**	**100**

Fonte: dados da pesquisa.

Esses dados confirmam as observações feitas anteriormente, ou seja, ainda há muitas dificuldades na compreensão desses tópicos que são estudados no Ensino Fundamental e alguns desses professores, pela falta de conhecimento comum desses conteúdos, não têm condições de produzir múltiplas representações para as respostas, que é um dos aspectos-chave do conhecimento especializado do conteúdo.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para ter uma ideia geral do conhecimento comum e especializado do conteúdo Geometria e área, por parte dos professores por nós investigados, vamos comparar esses dados com os obtidos por Steele (2013).

No item **a** da primeira questão, Steele (2013) encontrou que 84% dos 25 respondentes afirmaram ter as duas regiões a mesma área; em nossa pesquisa, 86% dos 21 professores fizeram a mesma afirmativa. Já no item **b**, enquanto que na pesquisa de Steele (2013), 92% dos participantes responderam que a figura 3 tem maior perímetro, em nossa investigação, 86% fizeram a mesma afirmativa.

De qualquer forma, nessa questão, consideramos que a maior parte dos professores tem conhecimento comum do conteúdo, já que compreendem a relação entre comprimento, perímetro e área de um polígono irregular em que a área é fixa e o perímetro varia. No entanto, em termos de conhecimento especializado do conteúdo, ainda há dificuldades para justificar as respostas por meio de princípios gerais sobre as relações entre essas medidas.

Na segunda questão, vemos que, na pesquisa de Steele (2013), 48% dos respondentes julgaram ser a afirmativa falsa e deram exemplos para justificar; na nossa, apenas 19% dos professores indicaram esse tipo de resposta. As concepções que surgiram nas respostas incorretas mostram dificuldades em termos de conhecimento comum do conteúdo e, também, quanto ao conhecimento especializado, haja vista que muitos não foram capazes de diferenciar os elementos das áreas de paralelogramos que não são retângulos, o que é fundamental para ensinar esses conceitos.

Na terceira questão, Steele (2013) não indicou o percentual de respostas corretas, mas comentou que praticamente a metade dos respondentes apresentou exemplos empíricos e a outra metade citou os princípios gerais relacionados às propriedades geométricas explícitas. Considerou, também, que a maior parte dos respondentes usou múltiplas representações nas respostas, como gráficas, tabulares, simbólicas e na linguagem natural. Em nossa pesquisa, apenas 52% apresentaram respostas corretas ou parcialmente corretas e nelas foi possível notar que dois deles usaram representações gráficas, um empregou representação simbólica, cinco apenas testaram valores, indicando-os em figuras, e três deles usaram representação tabular. Os professores que erraram mostraram não só falta de conhecimento comum do conteúdo como também de conhecimento especializado, haja vista, por exemplo, que não mostraram habilidades para planejar uma solução para um problema que envolve a situação de considerar uma medida fixa e a outra variando.

Como os itens da quarta questão são semelhantes na sua solicitação, vamos analisá-los em conjunto. Steele (2013), nessa questão, não computou respostas corretas ou incorretas, porque seu objetivo, em uma entrevista posterior com os respondentes, foi verificar que modificações eles fariam ao planejar a tarefa para alunos do nível correspondente ao nosso Ensino Fundamental. Chama a atenção em nossa pesquisa, primeiramente, o fato de que o percentual de respostas corretas ou parcialmente corretas, no item **a**, foi de 62%, mostrando que o conhecimento comum do conteúdo não está plenamente desenvolvido nesse grupo de professores. Já no item **b**, não houve resposta correta, ou seja, nenhum professor se deu conta de que, não sendo dito que os valores dos lados eram inteiros, o valor do perímetro poderia ser menor do que 20m. No item **c**, por ser uma generalização de um procedimento já realizado antes, 67% dos professores acertaram a generalização.

De maneira geral, portanto, os professores participantes da nossa pesquisa mostraram que seu conhecimento comum do conteúdo abordado não é totalmente desenvolvido e seu conhecimento especializado é ainda mais problemático, haja vista que apresentaram erros conceituais e procedimentais, o que, em nossa opinião, pode influenciar o ensino por eles ministrado, tanto no nível Fundamental como no Médio.

Assim, este relato, ainda que não possa ser conclusivo, pelo pequeno número de professores envolvidos, já é um alerta para que esses conhecimentos sejam investigados, tanto em professores da educação básica como nos que lecionam em cursos de formação de professores, pela responsabilidade que lhes cabe na disseminação de concepções errôneas sobre perímetro e área de figuras planas.

REFERÊNCIAS

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, Nov./Dec. 2008.

BALL, D. L.; FORZANI, F. M. What does it take to make a teacher? **Phi Delta Kappan**, v. 9, n. 2, p. 8-12, 2010.

CURY, H. N.; RIBEIRO, A. J.; MüLLER, T. J. Explorando erros na resolução de equações: um caminho para a formação do professor de Matemática. **Unión**, n. 28, p. 143-157, dic. 2011.

MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. **Geometria Moderna**. Brasília: Editora Edgard Blücher, 1971.

MORU, E. K. et al. Teacher knowledge of error analysis in differential calculus. **Pythagoras**, v. 35, n. 2, p. 1-10, 2014.

PENG, A.; LUO, Z. A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. **For the Learning of Mathematics**, v. 9, n. 3, p. 22-25, Nov. 2009.

SPEER, N. M.; KING, K. D.; HOWELL, H. Definitions of mathematical knowledge for teaching: using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. **Journal of Mathematics Teacher Education**, n. 18, p. 105-122, 2015.

STEELE, M. D. Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. **Journal of Mathematics Teacher Education**, n. 16, p. 245-268, 2013.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.

CAPÍTULO 8

CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO: UMA REVISÃO DAS IDEIAS DE SHULMAN E BALL

Helena Noronha Cury

1. INTRODUÇÃO

Na primeira leitura do clássico artigo de Shulman, "Aqueles que entendem: crescimento do conhecimento sobre ensino", de 1986, notei que suas ideias poderiam embasar os estudos sobre erros em resoluções de problemas ou exercícios de Matemática, especialmente ao pensar nas dificuldades de professores em formação inicial ou continuada quanto a conteúdos específicos de Matemática. Na etapa inicial de busca de material sobre as ideias de Shulman, encontrei a produção de Deborah Ball[32] e, por meio de referências cruzadas, arquivei uma grande quantidade de textos que abordam o conhecimento para o ensino, tanto na visão de Shulman como na de Ball. Além disso, na *homepage* de Deborah Ball foi possível encontrar muitas publicações, disponíveis no próprio site ou com a indicação das fontes. Assim, neste capítulo, faço uma revisão dos conceitos que podem embasar pesquisas sobre dificuldades na formação de professores.

Em cursos de Licenciatura em Matemática ou mesmo de Mestrado em Ensino ou Educação Matemática, considera-se que ainda há dificuldades no planejamento de ações que preparem os professores para as tarefas inerentes ao ensino de Matemática, haja vista, por exemplo, resultados de pesquisas sobre erros cometidos por professores na resolução de questões que envolvem conteúdos de Matemática estudados na educação básica ou nos anos iniciais dos cursos de graduação (CURY; BISOGNIN; BISOGNIN, 2009; LEIVAS; CURY, 2010; VIALI; CURY, 2011; CURY; RIBEIRO; MÜLLER, 2011; CURY; ETCHEVERRIA, 2012, entre outros).

Por essas pesquisas, pode-se supor que muitos professores não atingem sequer o conhecimento do conteúdo matemático, segundo a classificação de

[32] Agradeço ao Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, que indicou a leitura dos trabalhos de Ball e seus colaboradores.

Shulman (1986), opinião que é corroborada por Adler (2005, p. 9), quando afirma: "o problema dos professores de matemática atualmente em serviço [...] é que eles não conhecem suficientemente a matemática". Assim, não é de estranhar que esses professores não tenham, muitas vezes, o conhecimento de métodos e técnicas de ensino de Matemática, não saibam como planejar estratégias de ensino que auxiliem os alunos a construir conhecimentos, não saibam como avaliar o desempenho dos estudantes, entre tantos outros aspectos que seriam esperados de um professor dessa disciplina.

Tendo a oportunidade de desenvolver várias pesquisas sobre erros, com apoio do CNPq, em diferentes modalidades de auxílio[33], entendo que é possível embasar novas investigações com base nos constructos desenvolvidos por Shulman, Ball e outros pesquisadores que têm investido esforços em entender o conhecimento do professor de Matemática. Dessa forma, trago, neste último capítulo, uma revisão dessas ideias, com o intuito de relacionar investigações sobre erros com aquelas realizadas sobre a formação do professor de Matemática.

2. UM POUCO DE HISTÓRIA

Conhecer um pouco da história de como Lee Shulman e Deborah Ball se voltaram para a área de formação de professores é interessante para contextualizar suas trajetórias e as ideias que propuseram. Neste item, apresento, sucintamente, um pouco dessa história, com base no livro escrito em 2014 pela jornalista americana Elisabeth Green, "Construindo um professor melhor"[34].

Pelos anos 50 do século passado, um pesquisador americano de origem judaica, Nate Gage, propôs-se a criar uma "verdadeira ciência do ensino"[35], apoiado no paradigma processo-produto. Sua ideia era de que, comparando o processo (de ensino) com o produto (a aprendizagem), seria possível determinar quais atividades de ensino eram efetivas e quais não o eram. Suas pesquisas

[33] Processos: 475572/2004-1, 471503/2008-8, 310947/2009-0 e 303220/2012-0.

[34] *Building a better teacher: how teaching works (and how to teach it to everyone).*

[35] Para facilitar a leitura, algumas citações de palavras ou frases curtas são apenas indicadas entre aspas, sem localização de páginas ou data, visto se tratar sempre do mesmo livro.

foram publicadas em um *Handbook*, que teve muito sucesso entre os pesquisadores em Educação daquela época, nos Estados Unidos. Em 1971, quando foi convidado a auxiliar na organização de uma conferência em Washington, que tinha como objetivo "modificar o campo" das pesquisas em educação, Gage elaborou um texto, enviou para todos os seus colegas de Stanford e este chegou até um professor visitante dessa universidade, originário da Universidade de Michigan, chamado Lee Shulman.

Quando perguntaram a Shulman sua opinião sobre o texto de Gage, ele simplesmente declarou que era "lixo", porque era um testemunho do passado. Efetivamente, o trabalho de Gage tinha como fundamento o behaviorismo, tendo sido aluno de Skinner, a figura mais importante do campo da psicologia educacional até então.

Shulman não era psicólogo, era filósofo, e criticava o behaviorismo. Pela insistência de colegas, ele escreveu um pequeno texto com o que chamou de "crítica polida" ao que Gage fazia, no qual insinuava que o futuro das pesquisas sobre ensino deveria se firmar no trabalho cognitivo. Assim, foi com surpresa que recebeu um telefonema, dias depois, do próprio Gage, convidando-o a coordenar um painel na conferência de Washington.

Shulman era especializado em estudar o "pensamento sobre o pensamento"; como Dewey, ele estava interessado na resolução complexa de problemas e tinha iniciado pesquisas sobre como os médicos resolvem problemas que surgem em sua profissão. A partir de suas investigações, auxiliou a melhorar a educação médica na Universidade de Michigan. Shulman estava em Stanford planejando estender suas descobertas sobre resolução de problemas e investigar possíveis implicações para a educação.

Na conferência para a qual foi convidado, Shulman adaptou a apresentação de seu relatório de pesquisa, escrevendo "professores" em lugar de "médicos". Gage pensava nos professores como coleções de comportamentos observáveis, Shulman pensava em processadores de informação. A questão principal, tanto para as pesquisas com médicos como com professores não era "qual é o melhor comportamento?", mas "como decidir qual dos muitos comportamentos deve ser empregado no caso em questão?". É um problema de diagnóstico.

Shulman, após a conferência, voltou a Michigan e continuou com suas pesquisas sobre os médicos, até que o Instituto Nacional de Educação o convidou para criar um novo centro de pesquisa e desenvolvimento para estudar o pensamento e a tomada de decisão do professor. Nessa empreitada, Shulman apontou o caminho para novas pesquisas, que deveriam explorar o talento dos melhores professores – o que chamou de "sabedora da prática".

Em 1986, foi publicado o texto de Shulman que é considerado clássico, "Aqueles que entendem: crescimento do conhecimento sobre ensino[36]", seguido, em 1987, pelo artigo "Conhecimento e ensino: fundamentos da Nova Reforma[37]". Segundo Ball, Thames e Phelps (2008, p. 392), esses textos foram citados em mais de 1.200 artigos e o interesse por eles sustentou "não menos do que 50 citações [...] em cada ano desde 1990". Nos últimos anos, especialmente no Brasil, esse interesse parece ter se disseminado, inclusive no campo da Educação Matemática, especialmente pela leitura e citação de artigos de Deborah Ball e colaboradores, que vêm investigando o conhecimento matemático para o ensino com base nas ideias de Shulman.

Shulman (1986) explica que iniciou as pesquisas relativas às concepções sobre o conhecimento do professor por meio dos testes que eram usados nos Estados Unidos durante o século XIX. Trazendo um histórico dos exames que davam autorização para ensinar em determinados estados americanos, o autor mostra que o importante, naquela época, era saber o conteúdo a ser ensinado. Já nos anos 1980, a ênfase passou para as competências e a capacidade de ensinar. O autor critica essa mudança, também nas pesquisas, e comenta que ele e seus colegas se referem à ausência de foco no conteúdo como o "problema do paradigma perdido".

Deborah Ball também começou a trabalhar em Michigan, na escola de Spartan Village, em East Lansing. Pelos anos 1980, ela se deu conta de que todos os seus alunos de 5º ano brigavam com a Matemática e que os fins de semana eram seus "piores inimigos", pois, se os alunos eram capazes de resolver um problema de divisão na sexta-feira, voltavam na segunda-feira sem sequer saber como começar. Buscando ajuda com outros professores, Ball tentou várias estratégias de ensino, mas chegou à conclusão de que deveria estudar mais Matemática para poder entender as dificuldades. Ingressou então no Departamento de Matemática da Universidade de Michigan, para fazer sua formação nessa área, mas notou que não havia, nessa formação, um curso que a preparasse para auxiliar os alunos a aprender Matemática.

36 *Those who understand: knowledge growth in teaching.*

37 *Knowledge and teaching: foundations of the New Reform.*

A partir de vários episódios de dificuldades encontradas por seus estudantes, Ball considerou que o problema estava relacionado ao tipo de conhecimento necessário para ensinar bem, pois esse problema

> [...] não se encontrava nem na categoria da educação geral nem na de Matemática pura, embora ambos os tipos de conhecimento fossem úteis. Como acréscimo à Matemática em si, ela argumentava, os professores de Matemática precisam conhecer os tipos de atividades e tarefas que levam a intuição dúbia de um estudante a uma sólida compreensão. Eles não só precisam dominar procedimentos, conceitos e o ciclo especial de conjecturas para argumentar em uma demonstração, mas também têm que conhecer os estudantes. (GREEN, 2014, p. 61).

Aos poucos, as experiências de ensino de Matemática desenvolvidas na escola onde Ball trabalhava a transformaram em um autêntico laboratório de ensino e, para facilitar os comentários que deveriam ser feitos sobre cada momento de ensino, estes foram gravados em vídeo por todo um ano escolar.

Os vídeos foram vistos e analisados por Hyman Bass, um professor de Matemática com décadas de trabalho em Álgebra pura, mas também interessado na forma como as crianças aprendem. Em especial, os episódios que mostravam a forma como Ball e seus colegas levavam os alunos de terceiro ano a construir demonstrações matemáticas entusiasmaram Bass, que trocou a Universidade de Columbia pela de Michigan e começou a trabalhar com a investigadora. Eles desenvolveram uma pesquisa formal sobre o tipo de conhecimento matemático necessário para ensinar bem essa disciplina, que chamaram de Conhecimento Matemático para o Ensino[38]: “o conhecimento matemático, as habilidades, os hábitos da mente e as sensibilidades que são vinculados ao efetivo trabalho de ensinar” (GREEN, 2014, p. 78). Esse constructo é, de certa forma, a versão matemática do conhecimento pedagógico do conteúdo, de Shulman, a sabedoria da prática dos especialistas.

A partir dessas ideias, Ball com vários outros colaboradores e orientandos têm trabalhado com essas ideias, disponibilizadas em várias publicações, muitas delas disponíveis na sua própria *homepage*: <http://www-personal.umich.edu/~dball/>. Atualmente, em vários periódicos, de diferentes países e idiomas, encontram-se artigos que citam suas publicações.

[38] *Mathematical Knowledge for Teaching, MKT.*

3. CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO

Em sua investigação, Shulman (1986) relata ter acompanhado professores secundários de Inglês, Biologia, Estudos Sociais e Matemática, por pelo menos um ano, empregando observações e entrevistas como instrumentos de pesquisa e, à medida que os dados se acumulavam, alguns questionamentos sobre o conhecimento dos professores iam surgindo. Assim, ele propôs uma distinção entre três categorias de conhecimento: a) conhecimento do conteúdo da disciplina; b) conhecimento pedagógico do conteúdo; c) conhecimento curricular.

O conhecimento do conteúdo é o que, usualmente, entendemos por "conhecimento", ou seja, aquilo que o professor sabe sobre a disciplina a qual leciona. Não é apenas ter ouvido falar sobre o assunto ou ter sido avaliado por meio de provas objetivas sobre tópicos descontextualizados daquele conteúdo. Como Shulman (1986) explica, "o professor precisa não só entender **que** algo é assim; o professor, além disso, deve entender **porque** é assim [...]", porque um tópico é central enquanto outro é secundário para a compreensão da matéria. (p. 9, grifos do original).

O conhecimento pedagógico do conteúdo foi definido como o conhecimento "que vai além do conhecimento da disciplina em si para a dimensão do conhecimento da disciplina **para ensinar**" (SHULMAN, 1986, p. 9, grifo do original). Entre os aspectos englobados por essa categoria de conhecimento, o autor inclui, para os conteúdos regularmente ensinados em uma determinada disciplina,

> [...] as formas mais úteis para representação daqueles tópicos, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos e demonstrações – em outras palavras, as maneiras de representar e formular um conteúdo que o faça compreensível para os outros. (SHULMAN, 1986, p. 9).

O conhecimento pedagógico do conteúdo também inclui a compreensão do que faz fácil ou difícil a aprendizagem de um conteúdo específico, as concepções e pré-concepções que os alunos têm e que trazem para a aprendizagem. Se essas concepções são equivocadas, o professor precisa saber, para planejar as melhores estratégias para superá-las.

O conhecimento curricular está relacionado ao desenho curricular para determinado nível de ensino e disciplina, bem como os materiais instrucionais apropriados para ensinar cada tópico do currículo. Como Shulman trabalhava antes com o conhecimento médico, ele estabelece uma analogia: o conhecimento curricular corresponderia, na medicina, à compreensão, pelo médico, de toda a gama de recursos e medicamentos que estão disponíveis para determinada enfermidade, incluindo segurança, custos, interações medicamentosas e conforto para o paciente. Assim, um professor maduro deveria possuir tal conhecimento sobre as alternativas curriculares disponíveis para o ensino.

Continuando com sua analogia, Shulman questiona se confiaríamos em um médico que só conhece uma maneira de lidar com uma doença. Da mesma forma, por que confiaríamos em um professor que não sabe quais são os recursos disponíveis, os melhores textos, *softwares*, vídeos, etc?

Shulman (1986) ainda acrescenta dois aspectos ao conhecimento curricular: os conhecimentos lateral e vertical do currículo. O primeiro está ligado à habilidade do professor em relacionar o conteúdo de uma determinada aula com os que estão sendo discutidos em aulas simultâneas de outras disciplinas. Ou seja, poderia ser entendido como o conhecimento necessário para trabalhar interdisciplinarmente. O conhecimento vertical do currículo é a familiaridade com os conteúdos que foram ou serão ensinados na disciplina, em anos anteriores ou posteriores.

Em novo artigo, Shulman (1987) volta a mencionar as categorias de conhecimento do professor, ao discutir a base do conhecimento para o ensino. O autor, então, explicita e amplia as classes que apresentou anteriormente, considerando que, no mínimo, os professores deveriam ter:

> • conhecimento do conteúdo;
> • conhecimento pedagógico geral, com especial referência àqueles amplos princípios e estratégias de manejo de classe e organização que parecem transcender o conteúdo da matéria;
> • conhecimento curricular, com domínio particular dos materiais e programas que servem como ´equipamentos especiais` para os professores;
> • conhecimento pedagógico do conteúdo, aquela amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é exclusivamente o campo dos professores, sua própria forma especial de compreensão profissional;
> • conhecimento dos alunos e suas características;
> • conhecimento dos contextos educacionais, desde os trabalhos de grupo, a governabilidade e financiamento dos distritos escolares até o caráter das comunidades e culturas; e

• conhecimento dos objetivos, propósitos e valores educacionais, e seus fundamentos filosóficos e históricos. (SHULMAN, 1987, p. 8).

Essa lista, assim detalhada, parece ser o que qualquer educador precisa para se referir ao conhecimento do professor de uma determinada área. A partir dessas ideias, Barbarah Ball e seus colaboradores teceram a rede de contribuições que define o conhecimento matemático para o ensino. Dentre os vários trabalhos apresentados por eles, provavelmente o artigo de 2008, de Ball, Thames e Phelps, intitulado "Conhecimento do conteúdo para o ensino: o que o faz especial?"[39], é o mais citado.

Nesse artigo, esses autores consideraram, inicialmente, que muitos estudos estavam enfocando a questão: o que os professores precisam saber, quais conteúdos devem compreender? Mas, por lhes parecer óbvio que os professores precisam saber conteúdos e procedimentos que vão lecionar ("primos, frações equivalentes, funções, translações e rotações, fatoração, etc."), decidiram determinar "que mais os professores precisam saber sobre matemática e como e onde os professores podem usar tal conhecimento matemático na prática". Em seguida, os autores definiram conhecimento matemático para o ensino: "o conhecimento matemático necessário para levar adiante o trabalho de ensinar matemática" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 395).

Sua abordagem para discorrer sobre o assunto nos interessa pelo fato de que esses pesquisadores começaram por um exemplo de erro em matemática básica: na "conta armada",

$$\begin{array}{r} 307 \\ \underline{-168} \end{array}$$

muitos alunos cometem os seguintes erros:

$$\begin{array}{r} 307 \\ \underline{-168} \\ 261 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 307 \\ \underline{-168} \\ 169 \end{array}$$

As causas dos erros são diferentes, pois no exemplo à esquerda o aluno tira o menor do maior, enquanto no da direita, "pede 1 emprestado" para a

[39] *Content knowledge for teaching: what makes it special?*

casa das centenas, porque há o zero que confunde o procedimento memorizado. Nesses casos, não se questiona o conhecimento do professor sobre o procedimento de efetuar tal subtração, mas a falta de cuidado ao propor, talvez precocemente, um exercício que não traz as melhores escolhas de números para ensinar o algoritmo da subtração.

Ball, Thames e Phelps (2008, p. 398) reportam-se à noção de conhecimento pedagógico do conteúdo e consideram que "[...] oferece uma maneira de construir pontes entre o mundo acadêmico do conhecimento disciplinar e o mundo prático do ensino". Mas também julgam que sua "conceitualização baseada na prática, de conhecimento do conteúdo para o ensino, proporciona uma maneira adicional de construir pontes entre esses dois mundos".

Com base em suas análises das necessidades matemáticas para o ensino, esses pesquisadores levantaram a hipótese de que o conhecimento do conteúdo, apontado por Shulman, possa ser subdividido em duas categorias (*conhecimento comum do conteúdo* e *conhecimento especializado do conteúdo*) e que o conhecimento pedagógico do conteúdo possa ser dividido em *conhecimento do conteúdo e dos estudantes* e *conhecimento do conteúdo e do ensino*.

Ao especificar os tópicos que consideram fazer parte desses novos domínios, Ball, Tames e Phelps (2008, p. 399) definem: o conhecimento comum do conteúdo (CCK) é "o conhecimento matemático e as habilidades usadas em outros cenários que não o do ensino". Ou seja, são conhecimentos necessários para o ensino, mas não exclusivos do professor. Por exemplo, saber o conteúdo que vai ser ensinado, reconhecer respostas erradas ou definições inadequadas apresentadas em livros-texto, usar termos e notações corretas. Assim, avaliar os conhecimentos que os futuros docentes dominam, em cursos de formação de professores, é fundamental para prepará-los para uma prática responsável.

A segunda categoria, conhecimento especializado do conteúdo (SCK), é formada pelos conhecimentos e habilidades matemáticas que são exclusivas do professor. Por exemplo, buscar padrões nos erros dos alunos ou opinar sobre as possibilidades de usar alguma abordagem não tradicional para ensinar determinado tópico.

A terceira categoria, conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS), combina o conhecimento dos estudantes com o conhecimento da Matemática. Como exemplo, pode-se citar a possibilidade de antecipar o que os alunos vão pensar sobre um assunto e o que vai confundi-los. Os mesmos autores discutem o que consideram central nessa categoria: o conhecimento das concepções dos alunos, adequadas ou errôneas. No exemplo da conta de subtração, se o professor já viu ou discutiu aqueles tipos de erros, sabe que são comuns e é capaz de reconhecê-los em uma análise rápida.

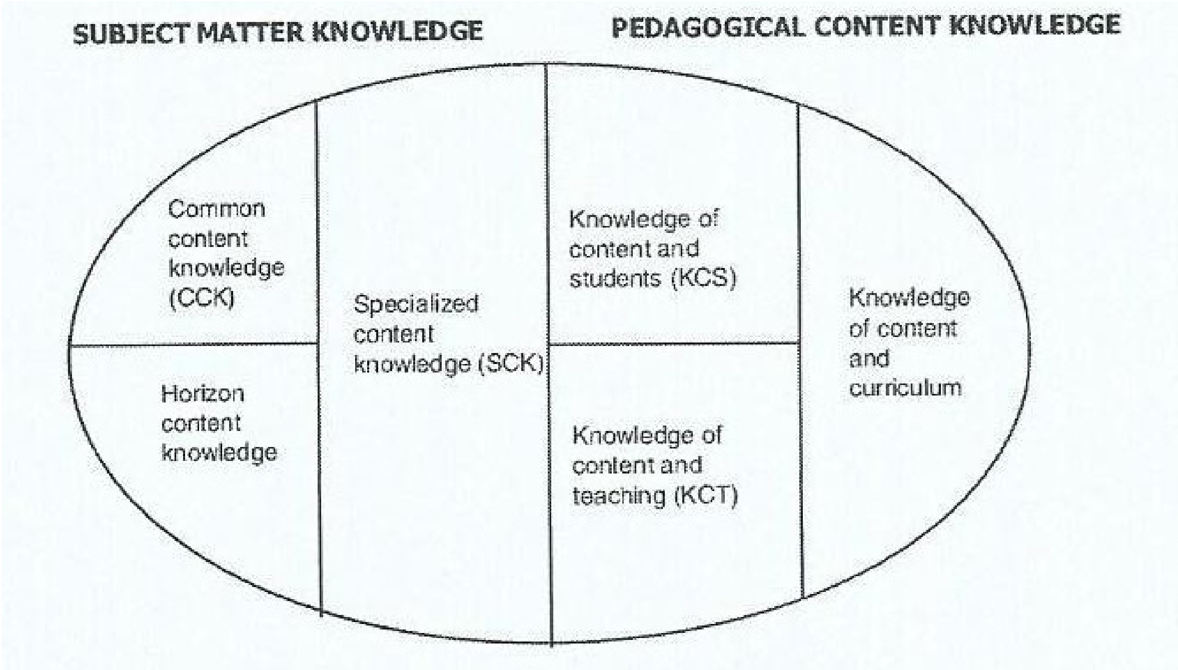
Em termos de erros, Ball, Thames e Phelps (2008, p. 401) apresentam distinções importantes sobre esses domínios:

> [...] reconhecer uma resposta errada é conhecimento comum do conteúdo (CCK), enquanto que opinar sobre a natureza de um erro, especialmente se não é familiar, requer agilidade em pensar sobre números, atenção aos padrões e pensamento flexível sobre os significados, de uma forma que é característica do conhecimento especializado do conteúdo (SCK). Por outro lado, familiaridade com os erros comuns e decisão sobre quais, entre muitos erros, são mais prováveis de serem cometidos pelos alunos, são exemplos de conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS).

O último domínio, conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT), combina o conhecimento sobre o ensino com o conhecimento sobre a Matemática. Assim, por exemplo, tarefas que exigem um sequenciamento do conteúdo, a escolha dos melhores exemplos, as vantagens e desvantagens de usar determinada forma de representação matemática, são características desse tipo de conhecimento (CURY, 2012).

Ball, Thames e Phelps (2008) esboçam uma figura para inserir suas categorias de conhecimento matemático para o ensino na classificação original de Shulman, de conhecimento do conteúdo da disciplina e conhecimento pedagógico do conteúdo, mas colocam a classe do conhecimento curricular, de Shulman, como parte do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Figura 1 – Domínios do conhecimento matemático para o ensino.



Fonte: BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 403.

Além disso, esses autores criam uma nova classe, “Horizon content knowledge” (HCK), definida como “[...] uma consciência de como tópicos matemáticos estão relacionados sobre a extensão da matemática incluída no currículo. [...] Também inclui a visão que é útil para ver conexões com idéias matemáticas posteriores” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 403).

A palavra “horizon” significa, em inglês, “horizonte”. Portanto, esse novo subdomínio criado não pode ser traduzido por “conhecimento horizontal do conteúdo”, é algo mais sutil. Uma busca em um dicionário inglês-inglês, além do significado citado, também traz uma frase que talvez ajude a entender a ideia por trás da escolha da palavra para o HCK: “Seus horizontes são os limites do que você quer fazer ou do que está interessado ou com que está envolvido[40]” (COLLINS, 2006, p. 533). Assim, em princípio, poderíamos pensar sobre onde estão os limites do conhecimento matemático com que o professor está envolvido, o que, nesse caso, abrange muito mais do que é lecionado em um determinado nível de ensino.

Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013) buscaram oferecer uma explicação melhor para este subdomínio do conhecimento do professor, porque, como afirmam, é o menos desenvolvido dentre os subdomínios que se basearam nas

[40] Your horizons are the limits of what you want to do or of what you are interested or involved in.

noções originais de Shulman. Os autores inicialmente comentam tentativas de explicar esse HCK e depois apresentam sua definição, com base nas pesquisas do grupo de Ball:

> HCK é uma orientação para e uma familiaridade com a disciplina (ou disciplinas) que contribuem para o ensino do conteúdo escolar próximo, fornecendo aos professores um sentido de como o conteúdo que está sendo ensinado está situado e conectado ao campo disciplinar mais amplo. HCK inclui conhecimento explícito das maneiras e ferramentas de conhecer, em uma disciplina, os tipos de conhecimento e suas justificativas, de onde vêm as ideias e como é estabelecida a "verdade" ou validade. [...]. HCK permite aos professores "ouvir" os alunos, para fazer julgamentos sobre a importância de ideias ou perguntas particulares e para tratar a disciplina com integridade, todos os recursos para equilibrar a tarefa fundamental de conectar os alunos a um campo vasto e altamente desenvolvido. (p. 4).

Ainda que longa, esta explicação não nos parece suficiente para dirimir dúvidas; talvez o parágrafo seguinte do texto seja mais esclarecedor:

> HCK não é o conhecimento comum nem o especializado e não se trata de uma progressão curricular, é mais sobre como ter uma sensação do ambiente matemático mais amplo da disciplina que está sendo ensinada. Nesse sentido, quando se discute HCK, não é suficiente simplesmente considerar o conhecimento sobre matemática avançada ou conhecimento sobre diferentes temas que possam surgir em futuros estudos dos alunos. HCK também inclui, mas não com a exclusão de outras coisas, o conhecimento que permite aos professores entenderem o sentido do que os alunos estão dizendo e agir com uma percepção das conexões com tópicos que os alunos podem ou não encontrar no futuro. (Ibid., p. 4).

Os autores apresentam um exemplo de um diálogo entre um professor da educação básica e alguns alunos, em que um deles apresenta, sem ter tido qualquer informação prévia, uma justificativa para o fato de que o produto de um número racional por um irracional é irracional. Na verdade, a justificativa é uma demonstração por absurdo e o que os autores querem pontuar é o fato de que, mesmo não sendo conteúdo da matéria, esse professor deve ter esse conhecimento de horizontes mais amplos da Matemática, para entender o raciocínio do seu aluno.

De qualquer forma, para explicar todos esses domínios e subdomínios do conhecimento do professor para o ensino de Matemática, já foi elaborada uma variedade de textos teóricos e relatos de pesquisas, alguns revisados no próximo item.

4. UMA REVISÃO DE LITERATURA SOBRE AS IDEIAS DE BALL E COLABORADORES

Por lidarmos com o conhecimento do professor de Matemática, busquei revisar, mais diretamente, os trabalhos que têm relação com esse conhecimento. Inicialmente, foi citada a tese de Ball, de 1988. Em uma época em que as crenças sobre a Matemática e seu ensino eram temas muito abordados em pesquisas (THOMPSON, 1984; LINARES; SANCHEZ, 1989), a autora investigou os conhecimentos e crenças de futuros professores de Matemática que ingressavam em cursos de formação. A partir de 19 entrevistas e de uma base teórica oriunda de filósofos e psicólogos que discutem a pedagogia matemática, a autora categorizou o conhecimento e as crenças do futuro professor sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem. A tese traz, então, as sementes do que posteriormente seria a classificação dos tipos de conhecimento matemático para o ensino, apresentada no item 3 deste capítulo.

Abordando, em ordem cronológica, trabalhos de Ball e colaboradores, pode-se citar as fontes e apontar suas contribuições para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Ball (1993a), ainda com base em sua tese, discorre amplamente sobre o ensino de frações para alunos de séries iniciais, especialmente sobre o uso de contextos representacionais. O texto oferece, além de exemplos bem escolhidos, algumas propostas para desenvolver novas práticas de ensino sobre o assunto.

Ball (1993b) volta a abordar o ensino em nível elementar, trazendo exemplos que já citara antes, para examinar o desafio de criar salas de aula em que os alunos efetivamente se engajem em atividades criativas, com conjecturas, argumentações e resoluções de problemas. Além disso, a autora disserta sobre o que chama de “dilemas” para conseguir ensinar em tais ambientes. O texto, ilustrado por várias referências de autores que tratam do ensino da Matemática, é leitura básica para quem pesquisa o ensino em séries iniciais.

Em 1999, Ball e Cohen partiram das ideias de reformas educacionais nos Estados Unidos para debater o que os professores precisam saber para desenvolver uma nova prática que atenda às reformas, que tipo de educação profissional pode auxiliá-los e como essas ideias podem se refletir no desenvolvimento profissional. Os autores reforçam a ideia de ensinar na e para a prática e propõem um currículo e uma pedagogia para a educação profissional dos professores. Seu texto é teórico e adequado às demandas da época nos Estados Unidos.

Ball e Bass (2000) trazem, inicialmente, uma discussão bem fundamentada sobre o conhecimento do conteúdo da matéria e o conhecimento pedagógico do conteúdo de professores de Matemática, especialmente de séries iniciais. Em seguida, apontam a brecha que julgam existir entre conteúdo e pedagogia. Após apresentarem alguns exemplos do que chamam de conhecimento na prática, os autores apontam três problemas que precisam ser resolvidos se queremos preparar professores não só para conhecer o conteúdo, mas também a prática. Segundo eles,

> um problema está relacionado à identificação do conhecimento de conteúdo que interessa para o ensino, um segundo está relacionado à compreensão de maneiras pelas quais tal conhecimento precisa estar disponível e um terceiro está centrado no que precisa ser aprendido para usar tal conhecimento na prática. (BALL; BASS, 2000, p. 95).

Pela profundidade das discussões e pelos exemplos detalhados, este texto também é fundamental para os formadores de professores de séries iniciais.

Novamente defendendo uma teoria baseada na prática, Ball e Bass (2002) iniciam seu texto apontando o fato de que, se queremos melhorar a aprendizagem dos alunos em Matemática, é necessário formar melhor os professores, pois o que estes sabem do conteúdo afeta o quanto sabem ensiná-lo. Nesse texto, os autores decidiram se debruçar sobre o trabalho do professor, discutindo como fazem o seu trabalho, quais problemas matemáticos precisam resolver e o que o exame do trabalho do professor implica em termos de conhecimento da Matemática para o ensino.

Mais uma vez, os autores exemplificam situações-problema de operações com naturais e com frações para defender suas ideias. Pode-se considerar que este texto avança em questões que o anterior havia pontuado, especialmente porque, a partir de exemplos, discute o conhecimento matemático para o ensino e o que chama de “desempacotamento” das ideias, procedimentos e princípios matemáticos que deveriam ser explorados na formação do professor para a prática.

Even e Ball (2003), no prefácio de uma edição especial do periódico *Educational Studies in Mathematics*, voltam a se referir à brecha entre teoria e prática e relatam que um grupo de pesquisadores da Universidade de Michigan, naquela época, estava desenvolvendo uma teoria baseada na prática do conhecimento matemático, que foi explicitada no artigo de 2008, de Ball, Thames e Phelps. As pesquisas desse grupo ainda deram origem a outros textos, bem como artigos de interpretação e aplicação dessas ideias.

Hill e Ball (2004) partem da ideia que já lhes parece consensual, de que os professores, nos Estados Unidos, precisam aumentar seu conhecimento para o ensino e consideram que um dos problemas no desenvolvimento de programas que preparem melhor os professores é a falta de evidências sobre o que constitui, efetivamente, esse desenvolvimento profissional. Uma das causas, em sua opinião, é a falta de medidas sobre tal conhecimento e, dessa forma, o artigo trata dos primeiros esforços para usar um instrumento planejado para medir o conhecimento do conteúdo para ensinar Matemática. Nesse artigo, Hill e Ball já esboçam os subdomínios CCK, SCK e KCS do conhecimento do professor de Matemática.

Hill e Ball (2004) aplicaram testes para avaliar um curso desenvolvido com professores dos Institutos de Desenvolvimento Matemático Profissional da Califórnia e realizaram análise estatística dos resultados. Mas essa primeira tentativa de medir o conhecimento dos professores não foi muito bem-sucedida, porque apenas cerca de 20% dos 2.300 professores participaram efetivamente do estudo. Ainda assim, as autoras consideram que outras avaliações do mesmo tipo poderiam trazer mais informações sobre o conhecimento do professor e sobre decisões relativas à sua formação.

Em outro artigo do mesmo ano, Hill, Schilling e Ball (2004) repetiram o relato dessa experiência de avaliação do conhecimento matemático para o ensino, mas nesse novo texto descreveram cuidadosamente os dados, em tabelas estatísticas, e, também, apresentaram exemplos de itens dos testes, em anexo. Mesmo que não seja possível ou desejável replicar o estudo por meios quantitativos, consideramos que esses exemplos e resultados podem nos auxiliar a criar instrumentos específicos para os professores brasileiros.

Ball e colaboradores ainda elaboraram mais dois textos com os dados dessa pesquisa-piloto, acrescidos de outros resultados em novas enquetes com alunos e professores da escola elementar. Em cada artigo, os autores refinaram as conceituações dos subdomínios do conhecimento matemático para o ensino. Hill, Rowan e Ball (2005) aprofundaram as análises estatísticas, com tabelas de correlação e alguns exemplos de itens do teste. Apesar de algumas limitações no estudo, os autores consideram que o conhecimento matemático dos professores prediz positivamente os ganhos dos alunos em aprendizagem, especialmente nos anos iniciais. Também sustentam e desafiam iniciativas políticas relacionadas à formação dos professores nos Estados Unidos.

Hill, Ball e Schilling (2008) discorreram sobre os subdomínios do conhecimento matemático para o ensino, inclusive repetindo a figura 1, já apresentada anteriormente. Neste texto, muitos trechos trazem referências aos erros e concepções errôneas dos alunos, citando outros autores que investigam tais dificuldades. Por exemplo, consideram que,

> se Shulman e outros estão corretos em pensar que os psicólogos educacionais revelaram regularidades na aprendizagem matemática e nos erros dos alunos, essas regularidades deveriam aparecer independentemente dos métodos ou materiais curriculares que os professores usam. [...] Em nosso estudo piloto, então, o KCS estava centrado no desenvolvimento e nos erros feitos pelos estudantes americanos médios, sem levar em conta os materiais curriculares, as técnicas instrucionais e outras influências matemáticas que os estudantes pudessem ter encontrado. (HILL; BALL; SCHILLING, 2008, p. 379).

Ao tentar construir itens para usar nos testes com os professores, em relação ao conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS), os autores consideraram que os matemáticos profissionais não sabem em qual nível os alunos cometem certos erros e quais são esses erros. À medida que progrediam na construção dos itens, consideravam que esses recaiam em quatro categorias:

> • Erros comuns dos alunos: identificar e proporcionar explicações para os erros, dando-se conta de quais erros surgem em determinados conteúdos, etc.
>
> • Entendimento do conteúdo pelos alunos: interpretar as produções dos estudantes até mostrar compreensão, decidir quais produções melhor indicam o entendimento, etc.
>
> • Sequências de desenvolvimento dos alunos: identificar os tipos de problemas, tópicos ou atividades matemáticas que são mais

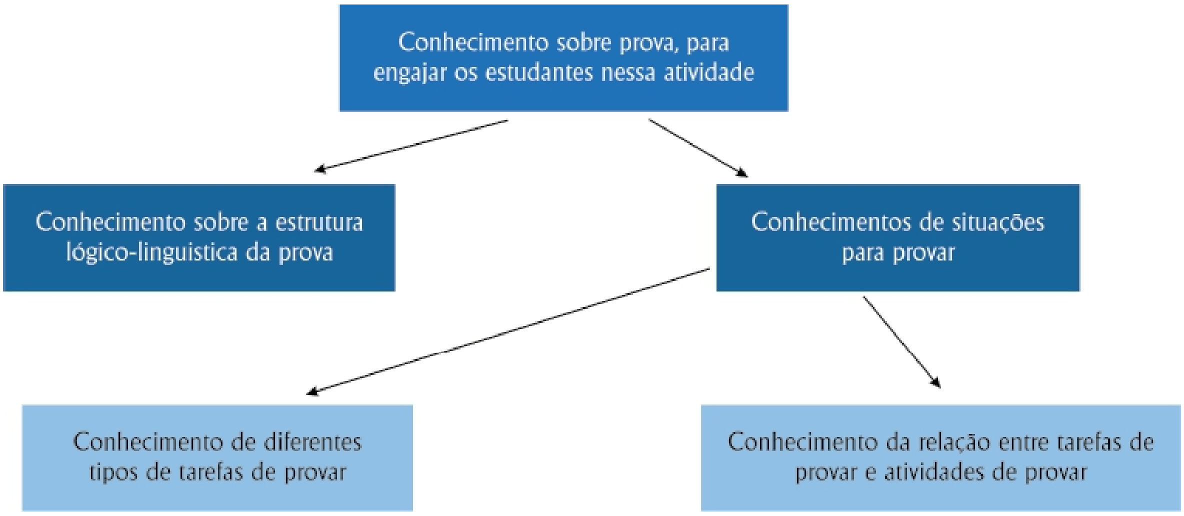
fáceis/mais difíceis em determinadas idades, sabendo o que os alunos aprendem "primeiro", dando-se conta do que os alunos de terceiro ano são capazes de fazer, etc.

• Estratégias computacionais comuns dos alunos: ser familiarizado com números que são pontos de referência, famílias de ocorrências, etc. (HILL; BALL; SCHILLING, 2008, p. 380).

Apresentando dados estatísticos e relatos parciais de entrevistas com os professores, os autores consideraram que os professores participantes da pesquisa tinham KCS, haja vista que a familiaridade com aspectos do pensamento matemático dos alunos, como conhecer os erros mais comuns, é um elemento desse subdomínio do conhecimento. Os autores concluem que este subdomínio, KCS, ainda precisa ser muito mais estudado e sugerem que outras investigações sejam feitas. Consideramos que o texto é importante pelas várias menções aos erros dos alunos.

Stylianides e Ball (2008) discutem o conhecimento que é necessário para realizar uma prova em Matemática e como os professores podem engajar seus alunos em atividades que levem a desenvolver essa capacidade de fazer demonstrações. Os autores identificam subcomponentes do conhecimento matemático para o ensino que são relacionados à atividade de provar, conforme a figura 2, a seguir:

Figura 2 – Uma classificação de diferentes formas de conhecimento sobre prova.



Fonte: adaptado de Stylianides e Ball, 2008, p. 313.

Além desse esquema, os autores trazem ainda a descrição e discussão de dois episódios de provas e é importante destacar que são realizados com alunos de séries iniciais, com conteúdos dessas séries, mas com um nível de detalhamento e conjecturas que pode ser pensado em um curso de graduação. Assim, este é outro artigo que traz sugestões interessantes para quem se propõe a investigar o conhecimento dos professores sobre demonstração.

Hill e Ball (2009) aproveitam seus estudos e trazem, em um periódico específico para o ensino primário e secundário nos Estados Unidos, a divulgação dos subdomínios do conhecimento matemático para o ensino. Neste texto, é interessante a analogia feita pelas autoras: profissões como medicina e enfermagem têm laboratórios próprios, bem como bonecos ou cadáveres para os estudantes treinarem nesses ambientes. No entanto, na formação de professores, em geral os laboratórios são as próprias salas de aula com alunos reais e se um estudante recebe uma explicação de um futuro professor que não entende, ainda, como deve ensinar um determinado assunto, esse aluno está sujeito a construir um obstáculo didático que o levará, futuramente, a ter concepções errôneas sobre tal tema.

Esse apanhado de textos de Ball e colaboradores permite que, a seguir, sejam revisados outros artigos que são específicos para embasar os estudos sobre o conhecimento matemático dos professores sobre os erros.

5. O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO E OS ERROS DOS ALUNOS

Ainda que não tenha relação com as ideias de Shulman e Ball, Olivier (1989) questiona as causas das concepções errôneas dos alunos, de forma que nos parece adequado para, depois, discutir como esse conhecimento sobre os erros pode fazer parte do conhecimento do conteúdo e dos estudantes. O autor distingue entre lapsos e erros; lapsos são respostas erradas devidas ao processamento, são não sistemáticos e esporádicos. Já os erros são devidos ao planejamento, são sistemáticos, porque aplicados regularmente nas mesmas circunstâncias, e são sintomas das estruturas conceituais subjacentes. E o autor finaliza afirmando: "São esses princípios e crenças subjacentes à estrutura cognitiva que são a causa de erros conceituais sistemáticos, que chamarei concepções errôneas" (p. 11).

Após apresentar vários tipos de erros cometidos por alunos, sistematicamente, Olivier apresenta algumas considerações que, por sua importância para o trabalho com erros, são aqui reproduzidas:

• Nós todos provavelmente concordamos que a Matemática é um conteúdo cumulativo e que qualquer novo aprendizado depende do aprendizado anterior. Nós também concordamos que

• **uma nova aprendizagem correta depende do aprendizado correto anterior** e também que

• **uma nova aprendizagem incorreta é muitas vezes o resultado da aprendizagem incorreta anterior.**

• O que eu tentei mostrar é que

• **uma nova aprendizagem incorreta é principalmente o resultado de aprendizagem correta anterior.**

• Cada concepção errônea que temos discutido teve uma origem legítima na aprendizagem correta anterior - cada concepção errônea estava correta para alguma tarefa anterior, da forma como é realizada em algum domínio anterior do currículo.

• A origem das concepções errôneas é principalmente uma sobregeneralização do conhecimento prévio (que era correto em um domínio anterior), para um domínio estendido (em que ele não é válido) (OLIVIER, 1989, p. 17, grifos do original).

Assim, Olivier aponta o que acontece com muitos erros já encontrados em pesquisas citadas nos capítulos anteriores deste livro. A sobregeneralização da propriedade $f(a + b) = f(a) + f(b)$, que se aplica apenas quando f é uma transformação linear, para a forma $f\,(a * b) = f\,(a) * f(b)$, em que f é qualquer função e * qualquer operação, é um erro que surge tanto no Ensino Fundamental, quando $\sqrt{a+b}$ se torna $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, como no Ensino Médio, quando sen(a.b) torna-se sen(a).sen(b) ou no Ensino Superior, quando $\frac{d(x.y)}{dt}$ torna-se $\frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dt}$. Em todos esses casos, parece que houve uma aprendizagem anterior correta, sobre a raiz quadrada do produto, o seno da soma ou a derivada da soma. No entanto, em algum momento, as aprendizagens anteriores foram sobregeneralizadas para as novas, nas quais não é válida a respectiva propriedade.

Os professores, mesmo os que estão iniciando sua formação, conhecem alguns desses erros e são até capazes de criticar os alunos que os cometem; no entanto, em outros casos, os erros são cometidos pelos próprios professores e é por isso que é necessário avaliar seus conhecimentos comuns do conteúdo, para depois planejar atividades que lhes permitam construir um conhecimento pedagógico do conteúdo, nos subdomínios que Ball e colaboradores apontam como fundamentais para estabelecer o conhecimento matemático para o ensino.

Alguns pesquisadores têm procurado criar situações e propor problemas que levem os professores, em formação inicial ou continuada, a lidar com os erros de seus alunos. Revisamos, a seguir, alguns textos, especialmente os que se baseiam nas ideias de Shulman ou Ball.

Peng e Luo (2009) consideram que há uma longa história de análise de erros no ensino de Matemática e citam autores desde os anos 1970 até os estudos de Ball e colaboradores. Entretanto, em sua opinião, há ausência de uma estrutura de conhecimento que apoie a análise de erros, para examinar o conhecimento do professor que é usado nessa análise. Assim, os autores apoiaram-se em vários estudos sobre erros, basearam-se no texto de Hill, Ball e Schilling (2008) e propuseram uma estrutura para examinar o conhecimento do professor de Matemática que é usado na análise de erros.

O quadro criado por esses autores aponta duas dimensões, natureza do erro e tipo da análise de erro. A primeira dimensão engloba quatro categorias, a saber: matemática, lógica, estratégica e psicológica. A dimensão do tipo de análise de erros também engloba quatro categorias: identificar, interpretar, avaliar e remediar. Todavia, os exemplos trazidos pelos autores para categorizar respostas de alunos e análises de professores não foram bem escolhidos, em nossa opinião, talvez porque o quadro, que supostamente tinha origem nos domínios do conhecimento do conteúdo da matéria e do conhecimento pedagógico do conteúdo, não mostrou as relações com esses constructos.

O artigo de Shalem, Sapire e Sorto (2014) trata das explicações que os professores apresentam para os erros dos alunos. O trabalho desses autores foi realizado durante um projeto de desenvolvimento profissional de professores da África do Sul, quando 62 docentes, por um período de três dias, discutiram em grupos suas experiências de ensino. Seis diferentes atividades foram propostas aos professores e uma delas consistiu em aproveitar dados de 332 itens de teste, coletados de 55.000 alunos que participaram de uma avaliação anual de escolas. Para os autores, esses dados de avaliações de larga escala "podem ser usados para estimular discussão e podem proporcionar uma oportunidade para os professores, ao invés de serem usados contra eles, como instrumento para identificar e censurar" (SHALEM; SAPIRE; SORTO, 2014, p. 11).

Com base em textos de Shulman e de Ball e colaboradores, os autores investigaram três domínios do conhecimento matemático para o ensino, a saber: CCK, SCK e KCS. Para cada domínio, foram criados critérios para analisar o conhecimento do professor sobre os erros. A tabela por eles criada é adaptada, no quadro 1:

Quadro 1 – Domínios do conhecimento do professor e critérios de análise de erros relacionados.

Critérios \ Domínios	Conhecimento do conteúdo da matéria		Conhecimento pedagógico do conteúdo
	CCK	SCK	KCS
1.Compreensão procedimental da resposta correta.	x		
2. Compreensão conceitual da resposta correta.	x		
3. Percepção do erro.		x	
4. Raciocínio diagnóstico do pensamento do aprendiz em relação ao erro.			x
5. Uso de elos corriqueiros nas explicações do erro.			x
6. Múltiplas explicações para o erro.			x

Fonte: adaptado de Shalem, Sapire e Sorto, 2014, p. 3.

Ainda que o texto analise quantitativamente os tipos de critérios usados pelos professores para analisar os erros, algumas respostas também são apresentadas em quadros, que podem nos auxiliar em projetos posteriores sobre os conhecimentos dos professores a respeito dos erros dos alunos. Os autores consideram que, de maneira geral, nas explicações dos professores sobre os erros dos alunos, o conhecimento do conteúdo da matéria é consistente, ao contrário do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Outro autor que trouxe boas contribuições para avaliar o conhecimento matemático para o ensino é Steele (2013), que descreveu um conjunto de tarefas de avaliação planejadas para medir o conhecimento de professores para o ensino de Geometria e medidas, em especial o que Ball chama de SCK. Steele comenta que, nos Estados Unidos, os alunos da escola elementar (até o 5º ano) aprendem a calcular perímetro e área de figuras planas e, nos três anos seguintes, supostamente devem saber fazer as relações entre essas medidas e fórmulas e as propriedades das figuras, até que, na *high school* (que corresponde ao nosso Ensino Médio), esses estudantes trabalham com teoremas de congruência e semelhança. Assim, se esse desenvolvimento fosse efetivamente atingido, os estudantes de *high school* deveriam ser capazes de responder as seguintes questões: o que acontece com a área de um retângulo se a altura dobra? O que acontece com seu perímetro? Os resultados são os mesmos se considerarmos outras figuras planas? Quais propriedades são invariantes e quais não o são quando perímetro e área mudam?

Pesquisas citadas por Steele (2013) mostram que nem sempre esses conhecimentos são atingidos e há resultados que apontam para uma melhora do conhecimento dos estudantes se forem realizadas intervenções sobre o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo da disciplina, por parte dos professores.

Ao investigar docentes de Cálculo Diferencial de uma universidade africana, Moru et al. (2014) mostram o conhecimento dos professores sobre análise de erros. Os pesquisadores partiram das seguintes questões: como os professores identificam os erros dos estudantes? Como os interpretam? Como os avaliam? Como remedeiam tais erros? Foram apresentadas, a dois professores de Cálculo, as respostas às duas questões mais erradas de um teste aplicado a 103 alunos de cursos superiores dessa disciplina. Os professores entrevistados identificaram os erros, apontaram possíveis causas, mostraram o impacto de tais erros no desempenho dos alunos e sugeriram estratégias de ensino que pudessem remediá-los.

Na fundamentação teórica de sua pesquisa, Moru et al. (2014) trazem considerações sobre os domínios do conhecimento matemático para o ensino, conforme o texto de Ball, Thames e Phelps (2008), e afirmam que o conhecimento dos professores sobre análise de erros deve incluir múltiplas interpretações sobre os erros dos estudantes. Além disso, consideram que os alunos deveriam ser questionados, para que explicassem suas respostas, pois "respostas corretas podem mesmo se originar de passos ou procedimentos incorretos" (MORU et al., 2014, p. 4).

Mesmo considerando que os dois professores entrevistados identificaram corretamente os erros cometidos pelos alunos, os autores julgam que esses docentes os interpretaram de uma única perspectiva, o que resultou na oferta de uma única estratégia para remediar os erros. Complementando essas conclusões, Moru et al. (2014) consideram que os professores enfatizaram a eficiência mais do que o conhecimento conceitual. Ainda que mostrassem familiaridade com os tipos mais comuns de erros (o que caracteriza CCK), os autores consideram que os domínios KCS e KCT não estão suficientemente desenvolvidos. Esses dados coletados nessa investigação, segundo Moru et al. (2014), têm implicações para a formação de professores e para o ensino, que inclui

> [...] engajamento contínuo em análise de erros, para enriquecer o conhecimento para o ensino, familiaridade com os erros dos estudantes e com a literatura sobre análise de erros, já que alguns erros em matemática são compartilhados por vários conteúdos, e realização de esforços para compreender teorias de aprendizagem, em particular as visões construtivistas que dizem respeito ao conhecimento construído pelo aprendiz. (p. 9).

Uma última pesquisa revisada, de Krauss, Baumert e Blum (2008), relata resultados de um teste para avaliar o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) e o conhecimento do conteúdo da matéria (CK), de professores secundários de Matemática. O teste foi criado no contexto de um projeto alemão que se propõe a conceitualizar e avaliar um largo espectro de competências de professores. O instrumento de pesquisa foi aplicado a professores cujos alunos estavam realizando o PISA *(Programme for International Student Assessment)*, nos anos de 2003 e 2004. Em relação ao PCK, os autores consideraram o conhecimento de tarefas matemáticas, o conhecimento das concepções errôneas e dificuldades dos estudantes e o conhecimento de estratégias específicas para o ensino.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi visto no capítulo 1 deste livro, há muitos autores que discutem pressupostos teóricos para embasar pesquisas na área de Educação Matemática. Além dos que já foram lá citados, pode-se também apontar o artigo de Even e Schwarz (2003). Esses autores analisam uma aula usando duas perspectivas teóricas distintas, que levam a diferentes interpretações. A partir dessa análise, discutem a interdependência entre teoria e resultados de pesquisas. Segundo esses autores, a teoria e a pesquisa estão envolvidas em um círculo vicioso e a investigação feita mostrou que "seus resultados foram interpretados de tal forma que confirmaram as teorias que serviram como lentes para as pesquisas" (p. 311). Mas ao mesmo tempo eles se questionam se a integração de diferentes perspectivas teóricas "permite desenvolver novas maneiras de pensar que quebrem as fronteiras das teorias e deem origem a novas, radicalmente diferentes das atuais" (Ibid., p. 311).

Dahl (2010) comenta que "é difícil acumular conhecimento na pesquisa em educação matemática devido às várias abordagens de pesquisa que às vezes aparecem como ondas de moda" (p. 200). A mesma autora finaliza seu artigo observando que há muitas maneiras de se mover para frente, em termos de pesquisas em Educação Matemática e, entre as sugestões que apresenta, destaca-se a ideia de que necessitamos "uma série de artigos de ´estado da arte`, trazendo junto a pesquisa recente, em uma tentativa de criar/descobrir uma meta teoria" (p. 206).

Essa sugestão de Dahl vem ao encontro dos objetivos perseguidos nesses projetos desenvolvidos com apoio de bolsa de produtividade em pesquisa, pois, além da quantificação dos dados referentes à produção sobre erros, dificuldades ou obstáculos, ainda foi possível trazer uma análise dos pressupostos teóricos que embasaram essas pesquisas. Acredito que todos os textos apresentados neste livro fornecem uma base para novas pesquisas, especialmente planejadas para analisar o conhecimento matemático para o ensino, em seus vários domínios. Em especial, considero que este livro traz elementos para analisar o conhecimento dos professores de Matemática sobre os erros dos alunos, trazendo, para investigações futuras, pressupostos que podem embasar as interpretações dos resultados.

Espero que este livro, concluindo um ciclo de pesquisas sobre erros, dificuldades ou obstáculos na aprendizagem de Matemática, possa servir de base para outras investigações sobre esses temas, de maneira a contribuir para a formação inicial ou continuada de professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

ADLER, J. Mathematics for teaching: what is it and why is it important that we talk about it? **Pythagoras**, n. 62, p. 2-11, Dec. 2005.

BALL, D. L. **Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy**: examining what prospective teachers bring to teacher education. 1988. Tese (Doutorado em Filosofia) – Michigan State University, East Lansing, Michigan, 1988.

BALL, D. L. Halves, pieces and twoths: constructing representational contexts in teaching fractions. In: CARPENTER, T.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Ed.). **Rational numbers**: an integration of research. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1993a. p. 157-196.

BALL, D. L. With an eye on the mathematical horizon: dilemmas of teaching elementary school mathematics. **The Elementary School Journal**, v. 93, n. 4, p. 373-397, 1993b.

BALL, D. L. Developing practice, developing practitioners: toward a practice-based theory of professional education. In: SYKES, G.; DARLING-HAMMOND, L. (Ed.). **Teaching as the learning profession**: handbook of policy and practice. San Francisco: Jossey Bass, 1999. p. 3-32.

BALL, D. L; BASS, H. Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: knowing and using mathematics. In: BOALER, J. (Ed.). **Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics**. Estport, CT: Ablex, 2000. p. 83-104. Disponível em: <http://www-personal.umich.edu/~dball/chapters/BallBassInterweavingContent.pdf>. Acesso em: 03 ago. 2015.

BALL, D. L.; BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: ANNUAL MEETING OF THE CANADIAN MATHEMATICS EDUCATION STUDY GROUP, 2002, Kingston, Canada. **Proceedings**. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.132.7284&rep=rep1&type=pdf#page=13>. Acesso em: 03 ago. 2015.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, Nov./ Dec. 2008.

BALL, D. L.; FORZANI, F. M. What does it take to make a teacher? **Phi Delta Kappan**, v. 9, n. 2, p. 8-12, 2010.

BORASI, R. **Reconceiving mathematics instruction:** a focus on errors. Norwood, NJ: Ablex, 1996.

COLLINS Cobuild Learner´s Dictionary. Glasgow: HarperCollins Publishers, 2006.

CURY, H. N. O conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros. In: CURY, H. N.; VIANNA, C. R. **Formação do professor de matemática**: reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul: Editora IPR, 2012. p. 19-48.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. um exemplo de utilização da análise de erros como metodologia de pesquisa. In: REUNIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DEL CONO SUR, 8., 2009, Asunción, Paraguay. **Actas...** Asunción: CEMPA, 2009. 1 CD-ROM.

CURY, H. N.; ETCHEVERRIA, T. C. Análise de erros: uma possibilidade na formação do professor de matemática. In: SIMPÓSIO DE ENSINO DE FÍSICA E DE MATEMÁTICA, 2., 2012, Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: UNIFRA, 2012.

CURY, H. N.; RIBEIRO, A. J.; MÜLLER, T. J. Explorando erros na resolução de equações: um caminho para a formação do professor de matemática. **Unión**, n. 28, p. 143-157, dic. 2011.

DAHL, B. Commentary on the fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. **Theories of Mathematics Education**. Berlin: Springer-Verlag, 2010. p. 193-208.

EVEN, R.; BALL, D. L. Connecting research, practice and theory in the development and study of mathematics education. **Educational Studies in Mathematics,** v. 54, n. 2-3, p. 139-146, 2003.

EVEN, R.; SCHWARZ, B. B. Implications of competing interpretations of practice for research and theory in Mathematics Education. **Educational Studies in Mathematics**, n. 54, p. 283-313, 2003.

GREEN, E. **Building a better teacher**: how teaching works (and how to teach it to everyone). New York: W.W. Norton & Company, 2014.

HILL, H. C.; BALL, D. L. Learning mathematics for teaching: results from California´s mathematics professional developments institutes. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 35, n. 5, p. 330-351, 2004.

HILL, H. C.; BALL, D. L. The curious – and crucial – case of mathematical knowledge for teaching. **Phi Delta Kappan**, v. 19, n. 2, p. 68-71, Oct. 2009.

HILL, H. C.; SCHILLING, S. G.; BALL, D. L. Developing measures of teachers´ mathematics knowledge for teaching. **The Elementary School Journal**, v. 105, n. 1, p. 11-30, 2004.

HILL, H.; ROWAN, B.; BALL, D. L. Effects of teachers´mathematical knowledge for teaching on student achievement. **American Educational Research Journal,** v. 42, n. 2, p. 371-406, 2005.

HILL, H.; BALL, D. L; SCHILING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers´topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 39, n. 4, p. 372-400, 2008.

JAKOBSEN, A.; THAMES, M. H.; RIBEIRO, C. M. Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematics teaching. In: CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 8., 2013, Antalia, Turkey. **Proceedings**. Disponível em: <http://www.researchgate.net/profile/C_Ribeiro4/publication/258960348_Delineating_issues_related_to_Horizon_Content_Knowledge_for_mathematics_teaching/links/00b7d5356838a7af3e000000.pdf>. Acesso em: 01 ago. 2015.

KRAUSS, S.; BAUMERT, J.; BLUM, W. Secondary mathematics teachers´ pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. **ZDM**, v. 40, n. 5, p. 873-892, 2008.

KRAUSS, S. et al. Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und - Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. **Journal für Mathematik-Didaktik**, v. 29, n. 3-4, p. 223-258, 2008.

LEIVAS, J. C.; CURY, H. N. Análise de erros em soluções de um problema de geometria: uma investigação com professores em formação continuada. **REVEMAT**, v. 5, n. 1, p. 71-83, 2010.

LLINARES, J; SANCHEZ, V. Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor. **Revista de Educación**, n. 290, p. 389-406, set./dic. 1989.

MORU, E. K. et al. Teacher knowledge of error analysis in differential calculus. **Pythagoras**, v. 35, n. 2, p. 1-10, 2014.

OLIVIER, A. Handling pupils' misconceptions. **Pythagoras,** n. 21, p. 9-19, 1989.

PENG, A.; LUO, Z. A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. **For the Learning of Mathematics,** v. 9, n. 3, p. 22-25, Nov. 2009.

SHALEM, Y.; SAPIRE, I.; SORTO, M. A. Teachers´explanations of learners´errors in standardized mathematics assessments. **Pythagoras**, v. 35, n. 1, p. 1-11, 2014.

SHULMAN, L S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986. Disponível em: <http://www.fisica.uniud.it/URDF/masterDidSciUD/materiali/pdf/Shulman_1986.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2015.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the New Reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, Feb. 1987. Disponível em: <http://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2015.

STEELE, M. D. Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. **Journal of Mathematics Teacher Education**, n. 16, p. 245-268, 2013.

STYLIANIDES, A. J.; BALL, D. L. Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. **Journal of Mathematics Teacher Education,** n. 11, p. 307-332, 2008.

THOMPSON, A. G. The relationship of teachers'conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. **Educational Studies in Mathematics**, n. 15, p. 105-127, 1984.

VIALI, L.; CURY, H. N. Professores de matemática em formação continuada: uma análise de erros em conteúdos de probabilidade. **Em Teia**, v. 1, n. 1, p. 1-24, 2011.

1 - Ana Marli Bulegon

Doutorado em Informática na Educação (UFRGS, 2011), Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física (UNIFRA, 2006), Especialização em Ensino de Matemática (UNIFRA, 1988) e Licenciatura em Matemática (UNIFRA, 1986). Atualmente é docente/pesquisadora do Centro Universitário Franciscano, atuando no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Suas áreas de interesse são: Educação mediada por tecnologias Digitais, Tecnologias da Informação e Comunicação, Ensino a Distância, Ensino de Ciências e Matemática, produção de materiais didáticos digitais e formação de professores.

Lattes disponível em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4559963D2>.

2 - Denise Kriedte da Costa

Doutorado em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde (UFRGS, 2014), Mestrado em Educação em Ciências e Matemática (PUCRS, 2004), Especialização em Educação Química (UFRGS, 1992), Graduação em Química (PUCRS, 1988). Atualmente é docente/pesquisadora do Centro Universitário Franciscano, atuando no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Suas áreas de interesse são: educação pela pesquisa, unidades de aprendizagem, autonomia, interdisciplinaridade, formação de professores.

Lattes disponível em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4776922H5>.

3 - Eleni Bisognin

Doutorado em Matemática (UFRJ, 1992), Mestrado em Matemática (UFRJ, 1979), Licenciatura em Matemática (UFSM, 1972). Professora aposentada da UFSM, atualmente é docente/pesquisadora do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano.

Seus interesses de pesquisa são: modelagem matemática, resolução de problemas e formação do professor.

Lattes disponível em <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4780772Z5>.

4 - José Carlos Pinto Leivas

Doutorado em Educação (UFPR, 2009), Mestrado em Matemática (UFSC, 1985), Especialização em Matemática (UFPEL, 1982), Graduação em Matemática (UCPel, 1974). Atualmente é docente/pesquisador do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano. Seus interesses de pesquisa são: Geometria, Educação Matemática, formação de professores, prática de ensino. É editor da revista *Vidya.*

Lattes disponível em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4787065Y1>.

5 - Silvia Maria de Aguiar Isaia

Doutorado em Educação (UFRGS, 1992), Mestrado em Filosofia (UFSM, 1981), Licenciatura em Filosofia (UFSM, 1973). Professora aposentada da UFSM e, atualmente, docente/pesquisadora do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano e bolsista pesquisadora de produtividade em pesquisa do CNPq. Seus interesses de pesquisa são: construção da docência, formação de professores, trajetórias de formação, desenvolvimento profissional docente, aprendizagem docente e discente, aprendizagem em Ciências e Matemática.

Lattes disponível em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4794447P2>.

6 - Thais Scotti do Canto-Dorow

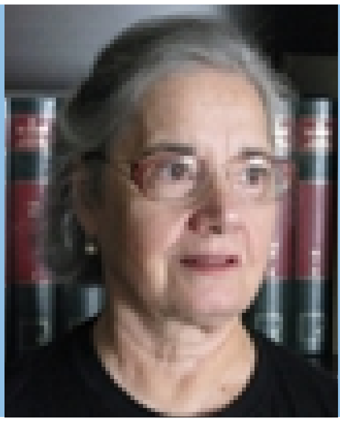
Doutorado e Mestrado em Ciências Biológicas (UFRGS, 2001, 1993), Graduação em Ciências Biológicas (UFSM). Professora aposentada da UFSM, atualmente é docente/pesquisadora do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano, do qual é coordenadora. Seus interesses de pesquisa são: Taxonomia Vegetal, principalmente nos temas Poaceae (Digitaria) e taxonomia de angiospermas. Atua nas linhas de pesquisa Formação de professores e Processo de ensino-aprendizagem, com ênfase no ensino de Biologia.

Lattes disponível em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4785950H0>.

7 - Vanilde Bisognin

Doutorado em Matemática (UFRJ, 1992), Mestrado em Matemática (UFRJ, 1978), Licenciatura em Matemática (UFSM, 1971). Professora aposentada da UFSM, atualmente é docente/pesquisadora do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano e Pró-reitora de Graduação da mesma Instituição. Seus interesses de pesquisa são: modelagem matemática, ensino-aprendizagem de Matemática, comportamento assintótico de soluções de modelos matemáticos definidos por equações diferenciais.

Lattes disponível em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4780772P9>.



A organizadora deste livro, Helena Noronha Cury, é Licenciada e Bacharel em Matemática, Mestre e Doutora em Educação, pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Atualmente é professora de Licenciatura em Matemática e do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano, de Santa Maria, RS. Seus interesses de pesquisa estão centrados na formação do professor de Matemática e na análise de erros.

editora unifra